

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA A
DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DA CONDUTIVIDADE E DIFUSIVIDADE TÉRMICA

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

GILMAR GUIMARÃES

Florianópolis, agosto de 1993

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA A
DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DA CONDUTIVIDADE E DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA


GILMAR GUIMARAES

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

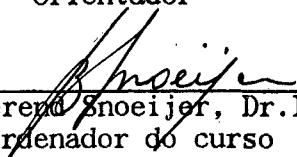
DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECANICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL

PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA




Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.
Orientador

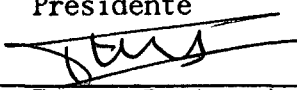


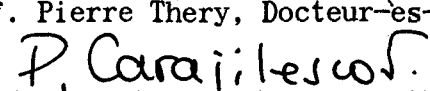
Prof. Berend Snoeijs, Dr. Ing.
Coordenador do curso

BANCA EXAMINADORA




Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.
Presidente

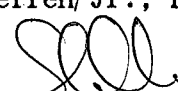


Prof. Pierre Thery, Docteur-es-Sciences


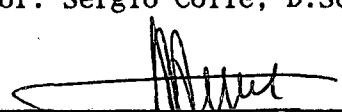
Prof. Pedro Carajilescov, Ph.D.



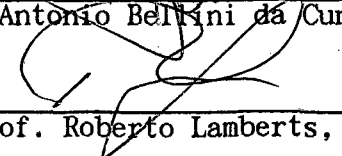
Prof. Valder Steffen Jr., Dr. Ing.



Prof. Sérgio Collé, D.Sc.



Prof. José Antonio Bellini da Cunha Neto, Dr.



Prof. Roberto Lamberts, Ph.D.

Este trabalho é dedicado

Aos meus Pais, Moisés Garibaldino Guimarães e Geraldina de Oliveira

À minha Esposa, Inez Vidal Magalhães

Ao meu Filho, Bruno Vidal Guimarães

e ao Prof. Valder Steffen Jr

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Paulo Cesar Philippi, pela amizade, orientação e condução desse trabalho.

Ao Prof. Sérgio Colle, que com sua percepção e intuição induziu-me ao domínio da frequência.

Ao Prof. Samir N. Y. Gerges, pela colaboração técnica inestimável. De sua participação efetiva se deve, em grande parte, o êxito desse trabalho.

Ao Prof. Pierre Thery, pela cessão dos transdutores de fluxo de calor.

Aos colegas Ricardo Veríssimo de Souza e Luis Mauro Moura, pelo grande apoio técnico e pessoal.

Aos Profs. José Antonio Bellini da Cunha Neto e Roberto Lamberts pelo convívio e apoio técnico no laboratório.

A Capes, pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA

FIGURAS.....	V
LISTA DE TABELAS.....	IX
RESUMO.....	X
ABSTRACT.....	XI
 CAP.1 - Introdução	 1
CAP.2 - Técnicas transientes: Conceitos e Fundamentos.....	6
CAP.3 - Método I - Estimação de parâmetros no Domínio do Tempo...	17
3.1 - Introdução.....	17
3.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico.....	17
3.3 - Implementação e Análise de Resultados.....	25
CAP.4 - Método II - Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência	34
4.1 - Introdução.....	34
4.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico.....	34
4.3 - Identificação Teórica de $Z_t(f)$	42
4.4 - Identificação Experimental de $Z_e(f)$	44
4.5 - Determinação de K e α	46
4.6 - Implementação do Método e Análise dos Resultados.....	49
4.6.1 - Introdução.....	49
4.6.2 - Determinação de α e K no Domínio da Frequência	50
4.7 - Resultados da Estimação de K e α da Amostra de Polythene.....	59

CAP.5 - Descrição da Bancada Experimental, Sistema de Aquisição e Análise de erros.....	61
5.1 - Aparato Experimental.....	61
5.2 - Análise de Erro.....	62
5.2.1 - Introdução.....	62
5.2.2 - Análise da Incerteza na Determinação de K e α ...	63
5.2.3 - Análise das Hipóteses de Fluxo de Calor Unidimensional e Contato Térmico Perfeito entre os Sensores e a Amostra Através de Simulação Numérica.....	65
5.2.4 - Erros no Sistema de Medição (Sistema de Aquisição e Sensores).....	89
CAP.6 - Análise de Resultados: Métodos da Estimação de parâmetros no Domínio do Tempo e da Freqüência.....	89
6.1 - Introdução.....	89
6.2 - Análise de Resultados.....	89
CAP.7 - Conclusão.....	93
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	97
APÊNDICES.....	104
I - Critério para Estimação de Parâmetros.....	104
II - Processos Aleatórios Estacionários - Conceitos Básicos.....	113
III - Desenvolvimento das Integrais relativas aos Fluxos de calor nas Superfícies da Amostra e Determinação dos Coeficientes de Sensibilidade.....	116

LISTA DE FIGURAS

pag

Figura 2.1a - Método Flash: forma esquemática.....	8
Figura 2.1b - Método Flash: Identificação de $w_{1/2}$	8
Figura 2.2 - Esquema de uma sonda térmica típica.....	10
Figura 2.3 - Modelos para obtenção de propriedades térmicas em métodos transientes.....	12
Figura 2.4 - Modelo para obtenção experimental de condição de isolamento.....	13
Figura 2.5 - Amostra sujeita à evoluções transientes de fluxo de calor e temperaturas nas superfícies. Aplicação de sensores superficiais.....	16
Figura 3.1 - Amostra sujeita a um fluxo de calor imposto na superfície..	18
Figura 3.2 - Fluxo de calor aplicado na superfície frontal da amostra...	26
Figura 3.3 - Evolução transiente das temperaturas.....	26
Figura 3.4 - Fluxo de calor resultante na superfície oposta da amostra..	27
Figura 3.5 - Coeficientes de sensibilidade.....	28
Figura 3.6 - Coeficientes de sensibilidade na superfície frontal.....	28
Figura 3.7 - Coeficiente de sensibilidade na superfície oposta.....	29
Figura 3.8 - Determinante da matriz coeficiente de sensibilidade.....	29
Figura 3.9 - Coeficiente de sensibilidade para uma amostra de polythene de 15 mm de espessura.....	30
Figura 3.10 - Perfis de temperatura simulados para uma amostra de polythene de 15 mm de espessura.....	31
Figura 4.1 - Modelo térmico equivalente usado para a estimação de propriedades na domínio da frequência.....	35

Figura 4.2 - Sistema dinâmico, tipo entrada/saída.....	39
Figura 4.3 - Perfil típico de um sinal de entrada.....	51
Figura 4.4 - Perfil típico de um sinal de saída.....	51
Figura 4.5 - Densidade auto espectral da entrada, $S_{xx}(f)$	53
Figura 4.6 - Densidade auto espectral de saída, $S_{yy}(f)$	53
Figura 4.7 - Componente real da densidade espectral cruzada, $\text{Re}\{S_{xy}\}$..	54
Figura 4.8 - Componente imaginária da densidade espectral cruzada, $\text{Im}\{S_{xy}\}$	54
Figura 4.9 - Coeficiente de sensibilidade, X_1	55
Figura 4.10 - Coeficiente de sensibilidade, X_2	56
Figura 4.11 - Módulo da impedância generalizada.....	58
Figura 4.12 - Fase da impedância generalizada.....	59
Figura 5.1 - a) Aparato experimental.....	61
Figura 5.1 - b) Modelo térmico equivalente.....	61
Figura 5.2 - Modelo simulado do aparato experimental.....	66
Figura 5.3 - Modelo para resistência de contato.....	68
Figura 5.4 - Resistência de contato: modelo sem interstício.....	68
Figura 5.5 - Comparação entre soluções numérica e analítica para a validação do modelo numérico no centro da amostra, $T(x,y)=$ $T(0,0)$	72
Figura 5.6 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção para a amostra de Polythene, para $t = 800$ s.....	73
Figura 5.7- Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, para amostra de madeira para $t = 800$ s.....	74
Figura 5.8 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de	

convecção para amostra de concreto para $t = 800$ s.....	74
Figura 5.9 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de aço.....	75
Figura 5.10 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de alumínio.....	75
Figura 5.11 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de Cobre.....	76
Figura 5.12 - Evolução da temperatura no centro da superfície de aquecimento. Amostra de polythene, $h_{tc}=20$ W/m ² K. Comparação com a solução unidimensional.....	77
Figura 5.13 - Evolução da transiente da temperatura no centro da superfície de aquecimento, para amostra de polythene, $h_{tc}=20$ W/m ² K. Comparação com a solução unidimensional.....	77
Figura 5.14 - Análise de resistência de contato, 10 μ m de interstício. Amostra de polythene.....	78
Figura 5.15 - Análise de resistência de contato, 10 μ m de interstício. Amostra de madeira.....	79
Figura 5.16 - Análise de resistência de contato, 10 μ m de interstício. Amostra de concreto.....	79
Figura 5.17 - Análise de resistência de contato, 10 μ m de interstício. Amostra de aço ANSI 302.....	80
Figura 5.18 - Análise de resistência de contato, 10 μ m de interstício. Amostra de cobre puro.....	80

Figura 5.19 - Medição indireta de uma varável física [41].....	81
Figura 5.20 - Sistema de aquisição usado (baixo ruído).....	81
Figura 5.21 - Incerteza estatística na estimação de resposta em frequência, $Z(f)$	87
Figura 6.1 - Comparação das soluções analítica e experimental do método de estimação de parâmetros, a partir das propriedades estimadas pelo método do domínio da frequência. (posição $x,y=(0,0)$).....	91
Figura AIII-1 - Curva típica de um fluxo de calor submetido na face frontal da amostra.....	116

LISTA DE TABELAS

pag

Tabela 3.1 - Simulação de estimação de parâmetros. Polythene, L = 15 mm Valores iniciais: K = 0,2 W / mK $\alpha = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	32
Tabela 3.2 - Simulação de estimação de parâmetros. Polythene, L = 15 mm Valores iniciais: K = 0,1 W / mK $\alpha = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	32
Tabela 3.2 - Simulação de estimação de parâmetros. Polythene, L=15 mm Valores iniciais: K = 0,01 W/mK $\alpha = 1,0 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$	33
Tabela 4.1 - Caracterização dos experimentos: fluxo de calor máximo, Q_{\max} , e fluxo de calor inicial, Q_0 , na superfície frontal; temperaturas iniciais, respectivamente, T_{s1} e T_{s2} nas superfícies frontal e oposta e temperatura média entre T_{s1} e T_{\max}	50
Tabela 4.2 - Simulação de estimação de parâmetros. Experimentos de número 1-11. Valores iniciais: K=0,35 e $\alpha=2,1 \times 10^{-7}$	57
Tabela 4.3 - Resultados para a estimação de K e α . Amostra de polyhtene L= 50 mm.....	57
Tabela 5.1 - Dimensões e propriedades térmicas para os diferentes materiais da bancada experimental.....	69
Tabela 5.2 - Propriedades térmicas para amostras de diferentes materiais.....	69

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de técnicas experimentais para a determinação de propriedades térmicas, e.g., calor específico, c , condutividade, K , e difusividade térmica, α , de diferentes materiais, tem interessado muitos pesquisadores devido a sua larga aplicação em problemas de engenharia [1-5]. A caracterização térmica de novos materiais, materiais compostos ou ainda materiais convencionais de estrutura complexa, e.g., materiais porosos, são alguns exemplos da importância relacionada com o desenvolvimento de técnicas experimentais para a determinação de parâmetros térmicos.

Esse trabalho é voltado ao estudo e desenvolvimento de métodos capazes de levar à obtenção da condutividade e difusividade térmica de materiais não metálicos. A atenção é direcionada especificamente ao desenvolvimento de técnicas que possibilitem a caracterização térmica de materiais porosos cujas características variam com a estrutura da matriz sólida e com o conteúdo de umidade. O estudo em regime permanente para a caracterização da condutividade térmica é descartado por ser um procedimento de longa duração, (15 horas em laboratório) [6], acarretando redistribuição de umidade na estrutura porosa. Além disso é incapaz da obtenção da difusividade térmica. Torna-se assim necessária a aplicação de métodos transientes. Investe-se nesse sentido em métodos que possam ser aplicados *in situ* em materiais de construção civil e materiais de isolamento térmico.

Existem vários métodos transientes capazes da obtenção da

condutividade térmica e difusividade térmica. Todavia, esse número diminui quando se deseja a obtenção dessas propriedades de forma simultânea. Como exemplos cita-se os métodos Flash e Fio Quente. O primeiro foi originalmente desenvolvido para a obtenção da difusividade térmica enquanto o segundo para a condutividade térmica. Todavia, ambos os métodos são capazes da obtenção simultânea das duas propriedades, ainda que com maior dificuldade (veja Capítulo II). Uma forma de cálculo interessante para a obtenção de várias propriedades simultaneamente e que pode ser aplicada a vários métodos é a estimação de parâmetros. Entretanto, quando se trata da obtenção de mais de uma propriedade o método torna-se bastante sensível e regiões em que não exista dependência linear entre os parâmetros envolvidos devem ser investigadas para que haja sucesso na estimativa. A busca de um método capaz da obtenção simultânea da condutividade térmica e da difusividade térmica, sem características destrutivas, ou seja, em que a região de medição não seja interna ao meio investigado foi a primeira motivação desse trabalho. Nesse sentido, inicialmente tentou-se a aplicação direta do método da estimação de parâmetros a partir de condições de contorno do tipo fluxo de calor prescrito com evolução transiente em ambas as superfícies e minimização da diferença das temperaturas superficiais experimentais e calculadas. Essas condições só podem ser aplicadas usando-se transdutores de fluxo de calor, que no caso são de rápida resposta e alta sensibilidade. Na verdade o uso desses transdutores dão uma grande versatilidade na manipulação de condições de contorno do tipo fluxo de calor prescrito. Nos casos anteriores conhecidos, onde cita-se o método flash e métodos de estimação de parâmetros [7], apenas o fluxo de calor submetido sobre a amostra era conhecido (não medido) e a outra superfície sempre isolada. Entretanto, esses métodos mostram-se mais adequados a amostras de características mais condutoras ou de espessuras menores que as amostras disponíveis nesse trabalho. Salienta-se que devido à necessidade

de validação dos métodos, optou-se por trabalhar com amostras padronizadas com condutividade térmica conhecida, a partir de método em regime permanente pelo National Physical Laboratory da Inglaterra. Isso motivou a busca de um novo método capaz da obtenção das propriedades em materiais não metálicos com espessuras mais robustas. O principal obstáculo na técnica de estimação de parâmetros usada no método de estimação de parâmetros no domínio do tempo foi a região de dependência linear entre a condutividade térmica e difusividade térmica que não pode ser evitada (veja Capítulo III). O segundo método desenvolvido para a estimação de K e α no domínio da frequência contorna esse problema, uma vez que as propriedades são determinadas de forma independente. Nesse sentido obtém-se a difusividade térmica de forma exclusiva através do ângulo de fase da função resposta em frequência da amostra. A condutividade térmica é então determinada através do módulo daquela função. As características do método desenvolvido permitem a aplicação direta em campo a partir de algumas hipóteses simplificativas. Resultados indicam que as hipóteses de temperatura constante e fluxo de calor nulo, na superfície da amostra oposta à superfície de aquecimento, podem ser aplicadas. Nesse caso, as propriedades térmicas seriam obtidas a partir das evoluções transientes do fluxo de calor e da temperatura na superfície frontal da amostra. Essa aplicação é particularmente interessante na determinação de propriedades térmicas de meios onde se tem acesso a apenas uma superfície, como por exemplo uma parede (semi-infinito).

Cabe salientar que não existe nenhum método transiente normalizado para a obtenção de propriedades térmicas, sendo esse trabalho uma contribuição para o aperfeiçoamento dessas técnicas.

Apresenta-se no capítulo II uma revisão de trabalhos voltados à

medição de duas das três propriedades: condutividade térmica, difusividade térmica e calor específico. A revisão baseia-se principalmente nos já conhecidos métodos transientes "Flash" e "Fio Quente", e em técnicas transientes de medição mais recentes, como estimação de parâmetros e processamento de sinais.

Dois métodos transientes são propostos neste trabalho. O primeiro utiliza a técnica de estimação de parâmetros e o modelo térmico baseia-se nas condições de contorno do tipo fluxo de calor prescrito nas duas superfícies. A geração do fluxo de calor é obtida por efeito Joule, através de uma placa fina de resistência e os fluxos de entrada e saída são obtidos através da medição usando-se transdutores de fluxo de calor. Estima-se as propriedades através da minimização da diferença de temperaturas nas superfícies medidas e calculadas pelo modelo térmico. A descrição desse método e seus resultados são apresentados no Capítulo III. Uma simulação da obtenção das propriedades através do método da estimação de parâmetros para uma amostra de polythene é exemplo de alguns dos resultados mostrados. O critério de minimização usado e o desenvolvimento de expressões matemáticas encontram-se nos apêndices I e III respectivamente.

No capítulo IV, desenvolve-se o método transiente que se baseia no tratamento de sinais de um sistema dinâmico tipo entrada e saída e obtém-se as propriedades no domínio da frequência. Nesse método desenvolve-se o modelo térmico a partir da combinação de fluxos de calor e temperaturas na entrada e saída do sistema, ou seja nas superfícies extremas da amostra. Obtém-se então as propriedades a partir da identificação e minimização da função resposta em frequência do sistema em suas formas experimental e calculada. Os transdutores de fluxo de calor são novamente usados para o acompanhamento da evolução temporal dos fluxos de calor nas superfícies.

Apresenta-se, também, os resultados do método nesse capítulo. Faz-se uma análise de todos os passos intermediários dos métodos, juntamente com a apresentação de seus dados experimentais. Determina-se, assim, a condutividade térmica e a difusividade térmica de uma amostra de polythene de 50 mm de espessura e superfície $30 \times 30 \text{ cm}^2$ no domínio da frequência. Apresenta-se os conceitos e fundamentos necessários à aplicação das técnicas de tratamento de sinais no apêndice II.

O capítulo V apresenta a bancada experimental. Observa-se que ambos os métodos utilizam a mesma bancada, que se constitui basicamente de dois transdutores de fluxo de calor e dois termopares superficiais como instrumentos de medição e de um elemento aquecedor, plano e de espessura fina, para a geração de calor numa face da amostra. Um sistema de aquisição de dados com interface para microcomputador completa o aparato experimental. Uma análise dos erros envolvidos nos dois métodos é também apresentada. Adicionalmente, desenvolve-se uma simulação numérica baseada em volumes finitos procurando-se simular as perdas de fluxo de calor laterais na amostra e o consequente desvio do fluxo de calor unidimensional aplicado na superfície frontal. Analisa-se também os efeitos do contato térmico entre sensores e amostras para diversos tipos de materiais simulando-se a resistência de contato como um interstício de ar de $10 \mu\text{m}$ de espessura na região dos transdutores.

No capítulo VI é apresentada uma comparação entre os dois métodos propostos. Para isso, obtém-se as temperaturas teóricas nas superfícies extremas da amostra, a partir das propriedades estimadas no domínio da frequência. Nesse caso, o modelo matemático e as histórias de temperaturas (medidas) são oriundas do método de estimação no domínio do tempo.

Conclui-se o trabalho no capítulo VII apresentando algumas propostas para trabalhos futuros, a partir dos métodos desenvolvidos.

CAPÍTULO II

Técnicas Transientes: Conceitos e Fundamentos

O procedimento básico usado na determinação de propriedades como a condutividade e a difusividade térmica se dá, usualmente, a partir da concepção de um modelo teórico, obtido da equação da difusão de calor. Uma vez estabelecido e identificado um campo térmico na amostra, obtém-se as propriedades a partir da comparação entre os dados experimentais e teóricos previstos no modelo - geralmente histórias de temperatura medidas e calculadas no interior e/ou superfície da amostra. Para o estabelecimento do campo térmico torna-se necessária a aplicação de uma fonte de calor na amostra. Observa-se assim que a definição do método usado completa-se a partir da escolha da localização da fonte de calor bem como dos sensores e.g., temperatura ou fluxo de calor, medidas e calculadas.

A maioria dos trabalhos sobre medição de condutividade térmica são relativos à medição em regime permanente. Para a difusividade térmica, entretanto, somente técnicas transientes permitem a sua determinação direta, [7]. Uma forma de se obter α indiretamente seria através da obtenção do calor específico e da condutividade térmica. Nesse caso, poder-se-ia utilizar métodos estacionários, como o método da placa quente protegida para K e do calorímetro de mistura para c , descritos pelas normas ASTM C518-76 [6] e ASTM C351-73 [8] respectivamente. Qualquer que seja o regime deve-se conhecer o fluxo de calor e temperaturas para a determinação de K e histórias de temperaturas para determinação de α , [7,9].

Pode-se analisar os métodos de medição sob dois aspectos: o modelo matemático que fornece a solução da equação da difusão de calor e as técnicas usadas para a realização experimental do problema. Parker et al [10] descreveram pela primeira vez um dos métodos, atualmente, mais empregados para obtenção da difusividade térmica - o método flash, [10-16]. Nesse método utiliza-se um pulso de calor radiante de alta intensidade e curta duração sobre uma superfície enegrecida da amostra. Mede-se a história da temperatura na face oposta, mantendo essa superfície termicamente isolada, como mostra a Figura 2.1a. Usa-se a solução unidimensional analítica, de Carslaw & Jaeger [17], para obtenção da difusividade, α e condutividade térmica, K , obtendo-se a evolução transiente da temperatura na face isolada, $T(L,t)$. Ou seja,

$$V = \frac{T(L,t)}{T_m} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \exp(-n^2 \cdot w) \quad (2.1)$$

onde T_m é o valor máximo da temperatura na face isolada e o parâmetro $w = \pi^2 \cdot \alpha \cdot t / L^2$, sendo t o tempo e L a espessura da amostra. Uma das maiores vantagens desse método é a obtenção da difusividade térmica sem a necessidade de se computar o valor do calor imposto na superfície, $x = 0$. Para isso, um procedimento é plotar a curva V versus w a partir da história da temperatura experimental e obter o tempo, $t_{1/2}$, correspondente ao valor de $V = 0,5$, veja a Figura 2.1b. Assim, obtém-se a difusividade térmica da expressão

$$\alpha = 1,38 L^2 / \pi^2 t_{1/2} \quad (2.2)$$

Para se determinar a condutividade térmica torna-se necessário o conhecimento do valor da energia absorvida na face frontal da amostra.

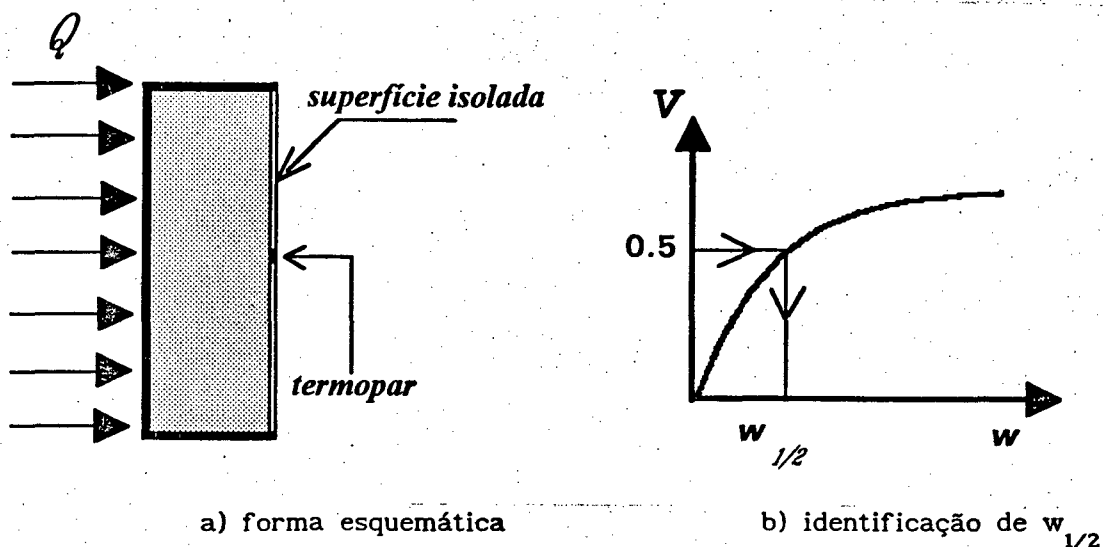


Figura 2.1 - Método Flash

Nesse caso obtém-se o valor de K através da definição da difusividade térmica,

$$K = \alpha \rho c \quad (2.3)$$

sendo a capacidade térmica, ρc , do material dado por

$$\rho c = Q/(L T_m) \quad (2.4)$$

onde Q é calor imposto por unidade de área na superfície frontal da amostra e ρ a sua massa específica. Observa-se que a dificuldade do método flash reside na implementação do aparato experimental. O pulso de calor de alta intensidade e curta duração, da ordem de 600 a 1000 J e 10 a 20 ms, respectivamente, imposto na superfície torna onerosos os custos de equipamentos como o gerador laser, capaz de atender essas especificações. Outra limitação é a alta sensibilidade e rapidez de resposta necessários aos equipamentos para a medição da temperatura. Quanto às amostras, essas

devem possuir espessuras da ordem de 2 mm. Entretanto, quando fontes de menor intensidade de energia (e. g., lâmpadas Xenônio) ou amostras de materiais não metálicos são usadas, as espessuras devem ser ainda menores, o que dificulta o trabalho com materiais porosos. Dentre as principais fontes de erros sistemáticas desse método, inclui-se os erros associados aos desvios das condições experimentais em relação às condições de contorno assumidas no modelo matemático,[16] . Cita-se, ainda os erros associados à determinação efetiva da espessura da amostra; erros associados à medição do tempo em que a superfície isolada alcança determinada porcentagem da temperatura máxima (normalmente 50 %) o que envolve também a determinação do instante inicial da ação do laser (ou similar) além das constantes de tempo dos detectores e amplificadores. Shoemaker [18] aponta ainda como as maiores fontes de erro, o efeito do pulso finito, as perdas de calor e a não uniformidade no aquecimento. Acrescenta-se também as perdas de calor na superfície isolada, uma condição difícil de ser realizada experimentalmente, bem como a identificação das perdas ou ganhos de calor por radiação e convecção no aquecimento. A obtenção de K a partir do valor medido da difusividade térmica também representa uma fonte de erro.

Uma outra técnica muito usada na medição de propriedades térmicas é o método do fio quente (Figura 2.2), inicialmente apresentado por Blackwell,[19]. Esse método envolve, normalmente, a inserção de um elemento filiforme (sonda) no centro axial do meio que se deseja medir, geralmente de forma cilíndrica. A sonda tem a função de dissipar calor (efeito joule) e medir a temperatura no interior da amostra atuando como um termômetro de resistência. Adicionalmente pode-se instalar termopares no corpo da sonda.

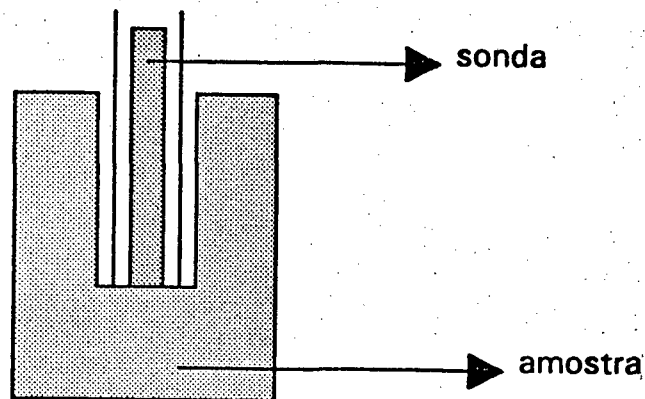


Figura 2.2 - Esquema de uma sonda térmica típica

Variações desse método têm sido usadas para medir as propriedades térmicas de sólidos e líquidos [20-27]. O método baseia-se na solução da equação da difusão de calor para uma fonte de calor em forma de linha infinita imersa num meio suposto infinito. A solução desse problema, dada por Carslaw & Jaeger [10] tem a forma,

$$\Delta T = T - T_0 = (Q_1 / 4\pi K) \ln(4\alpha t / r^2 C), \quad (2.5)$$

onde $T = T(t)$ é a temperatura da sonda, T_0 a temperatura inicial da sonda, Q_1 o calor imposto por unidade de comprimento de elemento, r o raio do elemento e C é igual a $\exp(y)$, onde $y = 0.57721$ é a constante de Euler. A equação é válida somente quando a expressão adimensional

$$r^2 / (4\alpha t) \ll 1, \quad (2.6)$$

é satisfeita. Para a determinação de α e K Glatzmaier & Ramirez [23] manipularam a equação (2.5), obtendo os valores das propriedades a partir de dados experimentais. Para isso, plota-se a história da temperatura em função de $\ln(t)$ usando-se uma curva de regressão linear obtida pelo método

dos mínimos quadrados. Assim, se A é a inclinação e B a intersecção da ordenada da reta, então as equações para K e α podem ser dadas por

$$K = q / (4\pi \cdot A), \quad (2.7)$$

e

$$\alpha = C r^2 / (4 \exp (B / A)) \quad (2.8)$$

Analisa-se a seguir algumas fontes de erros sistemáticos desse método. Knibbe [28] observa que a temperatura da sonda, suposta uniforme, normalmente é mais baixa em suas extremidades devido aos efeitos de resfriamentos causados por seus suportes. Consequentemente um aumento de temperatura menor acarretaria um valor maior na condutividade térmica estimada. Além disso, supõe-se que a sonda possa ser representada teoricamente como uma linha de fonte de calor. A grande dificuldade experimental é a obtenção de uma sonda suficientemente fina aliadas aos aspectos práticos de sua instalação. Outros fatores como comprimento mínimo da sonda para assegurar a hipótese de condição de fluxo radial deve ser considerada na execução experimental da sonda. Salienta-se novamente, a dificuldade prática de inserção da sonda no meio investigado. O método apresenta a vantagem da simplicidade das equações e a forma direta da obtenção das propriedades. A dificuldade está na realização do experimento para que as hipóteses simplificativas admitidas sejam satisfeitas. Uma desvantagem é o caráter destrutivo do experimento. Contudo, para medições em campo a previsão de sondas na construção do meio a ser explorado tornam o método eficiente e não destrutivo.

Na procura de métodos transientes alternativos, Clarke & Kingston [29], indicam alguns caminhos para obtenção de K e α , Figura (2.3)

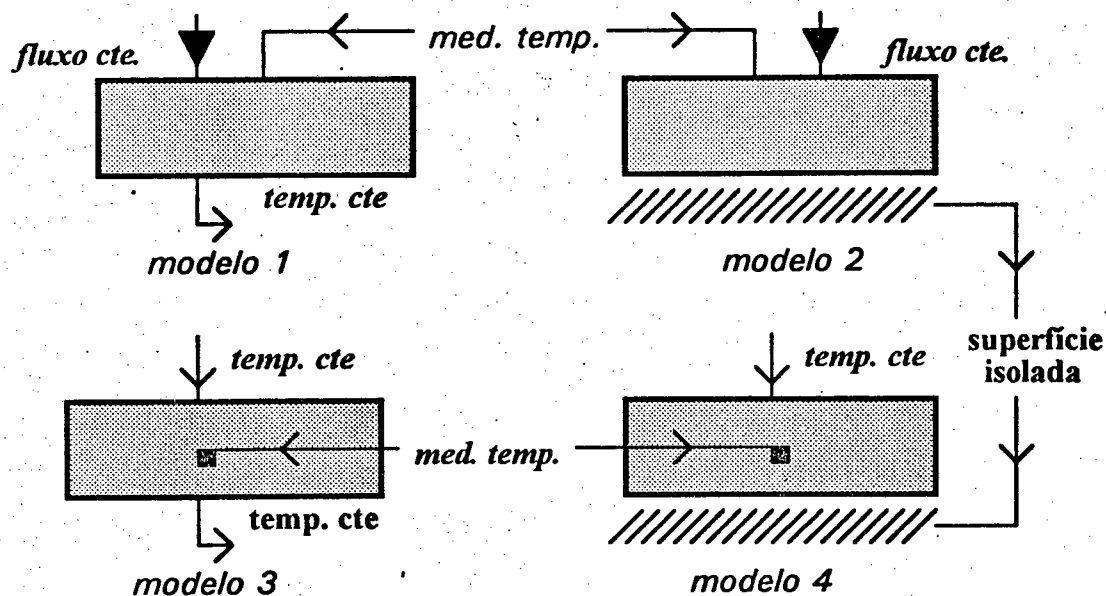


Figura 2.3 - Modelos para obtenção de propriedades térmicas em métodos transientes (Clarke & Kingston, [29])

Todavia, somente os modelos envolvendo o conhecimento do fluxo de calor imposto (modelos 1 e 2) são capazes da obtenção simultânea de K e α (ou c) [7]. A escolha de um método em particular depende da simulação das condições térmicas assumidas numa bancada experimental. O modelo 2 é, normalmente, o mais aplicado. As condições práticas de execução do fluxo de calor imposto na superfície são responsáveis pela variação desse método. Clarke & Kingston [29] apresentam uma forma alternativa ao método flash, onde a aplicação do fluxo de calor é feita através do uso de aquecedores de resistência. Obtém-se a condição de isolamento através do uso de duas amostras e duas fontes de calor idênticas dispostas como é mostrado na Figura 2.4. Obtém-se as propriedades K e α a partir da solução teórica e da evolução da temperatura na superfície isolada.

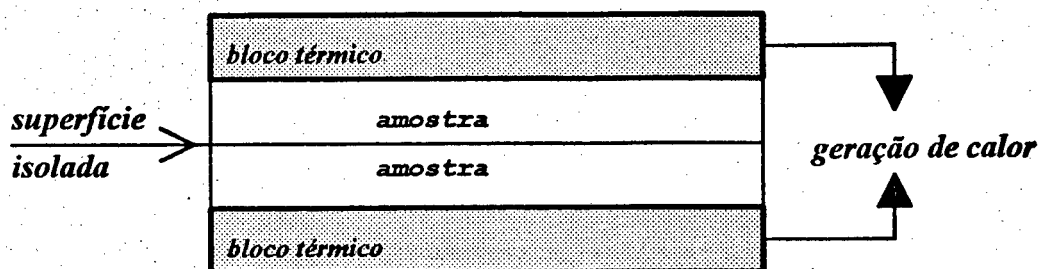


Figura 2.4 - Modelo para obtenção experimental da condição de isolamento

A dificuldade do método está na obtenção de amostras idênticas e na geração de fluxo de calor constantes e iguais num mesmo instante, tornando o método muito susceptível a erros. Entretanto a simplicidade de concepção da bancada experimental tem despertado o interesse de vários autores [8,30]. Adicionalmente os métodos de cálculo para obtenção das propriedades têm sofrido bastante alterações. Trabalhando no desenvolvimento de um método de cálculo mais eficiente e automatizado para determinação de K e α simultaneamente, Beck & Arnold [31] desenvolveram o método de estimação de parâmetros, aplicando-o em diversos modelos físicos (Fig. 2.3), além de outros, com corpos semi-infinitos. A estimação de parâmetros é um procedimento iterativo que busca determinar os parâmetros envolvidos na modelagem de algum fenômeno físico. Assim, obtêm-se os parâmetros através da minimização da diferença entre uma grandeza medida e o seu valor teórico calculado. A minimização é feita em relação aos parâmetros estimados. Beck & Arnold obtêm a condutividade e a difusividade térmica minimizando a diferença entre as temperaturas medidas e calculadas nas superfícies e/ou no interior da amostra, descritas pela solução do problema térmico. Uma aplicação do método de estimação de parâmetros, foi apresentada por esse autor, [32]. Nesse caso, a condição de isolamento da Figura 2.3 (modelo 2) foi substituída por uma condição de temperatura constante, permitindo a

variação transiente do fluxo de calor imposto na amostra dando-se maior flexibilidade à simulação experimental. A medição de temperatura efetivou-se no interior da amostra. Entretanto algumas fontes de erro como, por exemplo, o erro na medição de fluxo de calor através de transdutores de fluxo de calor e na obtenção experimental da temperatura constante devem ser analisados. Além disso, a medição de temperatura no interior da amostra apresenta dificuldades adicionais: i) o caráter destrutivo, ii) dificuldade prática da inserção do termopar e, iii) imprecisão na medição da posição do termopar no interior da amostra.

Observa-se assim que um método ideal do ponto de vista da simulação experimental não deve impor nenhuma restrição nas condições de contorno, ou seja, nas evoluções de temperatura e/ou fluxo de calor e ainda as medições das grandezas térmicas devem ser feitas preferencialmente nas superfícies do meio investigado. O uso de transdutores de fluxo de calor representa um avanço nesse sentido, uma vez que a evolução dos fluxos impostos nas amostras podem ser acompanhados. A dificuldade no uso de um fluxo de calor variável nos contornos está na obtenção da solução analítica do modelo proposto. No entanto técnicas de solução como funções de Green ou transformadas de Laplace se aplicam perfeitamente a esses casos. Observa-se que a fonte de erro devido à medição do fluxo de calor representa, nesse caso, a principal fonte de erro. Nesse sentido a calibração dos transdutores é bastante delicada.

Um exemplo da aplicação de transdutores de fluxo de calor é apresentado por Kougbeadjo & Thery [33]. Os autores aplicam princípios da correlação cruzada entre dois processos estocásticos na análise de problemas de transferência de calor, para a obtenção da difusividade

térmica. Os fluxos de calor impostos e resultantes que atravessam as superfícies frontal e oposta de uma amostra são detectados usando-se transdutores de fluxo de calor de alta sensibilidade [34]. Mede-se o tempo de difusão através da função de correlação cruzada entre o pulso de calor injetado e a resposta a esse pulso - o valor máximo dessa função se dá com um atraso igual ao tempo de difusão do pulso de calor através da parede. Determina-se então a difusividade térmica do material da parede a partir da identificação do tempo de difusão do sinal do pulso de calor através dela. A modelagem matemática desse método baseia-se na temperatura constante da face oposta e na forma do pulso, quadrado e instantâneo, sendo essas restrições as maiores fontes de erros sistemáticos do método. O pulso de calor aplicado através de uma folha de resistência assume experimentalmente formas exponenciais ou formas de pulsos quadrados com decaimento. Observa-se então que os desvios das formas de geração de calor são fundamentais para análise de erros uma vez que a obtenção da expressão teórica da correlação cruzada está associada à hipótese de um pulso quadrado. Os autores [33], entretanto, consideram que a obtenção do valor máximo da correlação cruzada não é alterada sensivelmente pela forma do pulso.

Os dois métodos propostos neste trabalho usam dois transdutores de fluxo de calor de resposta rápida e de alta sensibilidade desenvolvidos por Leclercq & Thery [34] e dois sensores de temperatura (termopares) aplicados nas superfícies para o registro da evolução dos fluxos de calor e temperaturas da amostra. A Figura 2.5 representa o modelo. Assim, substitui-se a hipótese de isolamento ou temperatura constante na superfície oposta à superfície aquecida pela condição real de perda de calor transiente a ser medida pelo transdutor. Da mesma forma, o aquecimento

imposto na superfície frontal é monitorado pelo transdutor de fluxo de calor. No primeiro método, as duas temperaturas medidas na superfície são usadas para a obtenção simultânea de K e α a partir da solução do problema da difusão de calor usando-se a técnica das funções de Green.

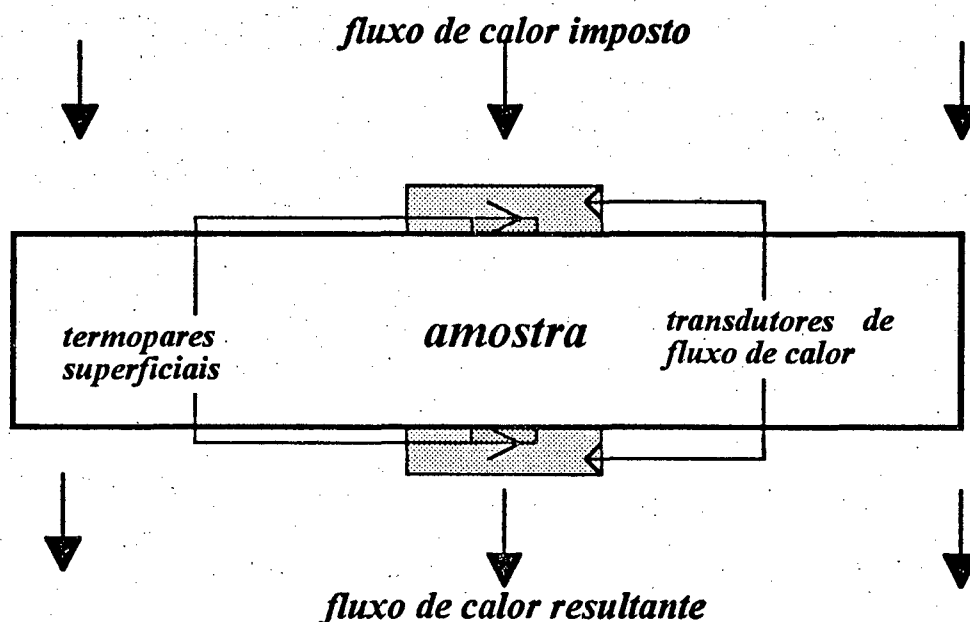


Figura 2.5 - Amostra sujeita a evoluções de fluxo de calor e temperatura nas superfícies. Aplicação de sensores superficiais.

O método de cálculo é baseado na técnica de estimação de parâmetros. O segundo método, que também utiliza o modelo experimental da Figura 2.5, usa como base de cálculo das propriedades a aplicação de conceitos de processamento de sinais, estimação de parâmetros e uma abordagem matemática do modelo, que permite o uso de conceitos de entrada/saída de sinais em um sistema.

CAPÍTULO III

Método I - Estimação de Parâmetros no Domínio do Tempo

3.1 - Introdução

Neste Capítulo, apresentar-se-á, inicialmente, o desenvolvimento do método de estimação de parâmetros no domínio do tempo, primeiro método proposto nesse trabalho. Os resultados de sua implementação são mostrados logo a seguir.

Um aspecto interessante a ser ressaltado, é, como foi observado anteriormente, o requisito da medição de grandezas térmicas nas superfícies da amostra. Essa alternativa - em relação ao procedimento de medições de temperaturas no interior da amostra, comumente usado, - revela-se importante uma vez que se procura aplicação do método *in Situ*, ou em superfícies que não se pode danificar. Essa é, fundamentalmente, a motivação do desenvolvimento desse método. A aplicação de fluxos de calor transientes na superfície frontal da amostra e utilização da monitoração dos fluxos em ambas as superfícies da amostra como condições de contorno no modelo matemático, representam também uma inovação nos métodos transientes usados na determinação simultânea dessas propriedades.

3.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico

A Figura 3.1 apresenta uma amostra plana homogênea sujeita a uma temperatura inicial T_0 , onde um fluxo de calor transiente, $\phi_1(t)$ é imposto num instante t_0 na superfície superior, e um fluxo de calor resultante, $\phi_2(t)$, atravessa a superfície oposta.

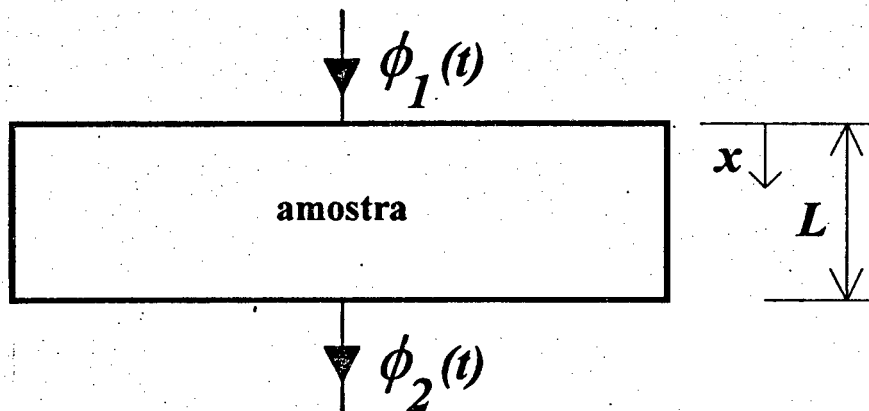


Figura 3.1 - Amostra sujeita a um fluxo de calor imposto na superfície

Sob estas condições, e considerando as propriedades térmicas constantes com a temperatura, o problema apropriado a valor de contorno é

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

sujeito às condições de contorno

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (3.2)$$

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (3.3)$$

e à condição inicial

$$T(x,0) = T_0 \quad (3.4)$$

sendo que ϕ_1 e ϕ_2 são os fluxos de calor medidos nas superfícies da amostra. Obtém-se a solução do problema dado pelas Eqs.(3.1-3.4) usando-se uma técnica de solução baseada nas funções de Green [35], ou seja,

$$\begin{aligned} T(x,t) = & \int_0^L G(x,t/x',\tau) \Big|_{\tau=0} F(x') dx' + \\ & \alpha \int_0^L G(x,t/x',\tau) \Big|_{x'=0} \frac{\phi_1(\tau)}{K} d\tau + \\ & \alpha \int_0^L G(x,t/x',\tau) \Big|_{x'=L} \frac{\phi_2(\tau)}{K} d\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $F(x')$ é a distribuição de temperatura inicial, nesse caso T_0 , e $G(x,t/x',\tau)$ a função de Green que satisfaz o seguinte problema auxiliar dado pela versão homogênea das Eqs. (3.1-3.4), ou seja,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \delta(x-x')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (3.6)$$

sujeito às condições de contorno

$$-K \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.7)$$

$$-K \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.8)$$

e

$$G(x,0) = 0 \quad (3.9)$$

para $t < \tau$, onde $\delta(x-x')$ é a função delta de Dirac para a variável espacial

x e $\delta(t-\tau)$ a mesma função para a variável temporal t . Observa-se que $G(x, t/x', \tau)$ tem uma função pulso unitária e condição inicial nula, ou seja, o meio está a uma temperatura nula para tempo $t < \tau$. Nesse caso, a fonte pulso unitária representa a condição inicial de distribuição de temperatura T_0 .

Desse modo, de acordo com a Eq. (3.5) a solução do problema original (Eqs. (3.1-3.4)) é dada em termos da função de Green que satisfaz o problema dado pelas Eqs.(3.6-3.9), como,

$$T(x, t) = \int_0^L G(x, t/x', \tau) \Big|_{\tau=0} F(x') dx' \quad (3.10)$$

Obtém-se assim a função de Green $G(x, t/x', \tau) \Big|_{\tau=0}$ resolvendo o problema homogêneo, pelo método de separação de variáveis e comparando sua solução com a Eq. (3.10). Assim,

$$G(x, t/x', \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \cos(\beta_m x/L) \cos(\beta_m x'/L) \quad (3.11)$$

onde β_m são os auto valores definidos por $\beta_m = m\pi$, com $m=1,2,3..$

Obtém-se a função de Green desejada, $G(x, t/x', \tau)$ substituindo-se a variável t por $t - \tau$, em $G(x, t/x', \tau) \Big|_{\tau=0}$, [35]. Logo,

$$G(x, t/x', \tau) = \frac{1}{2} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau)/L^2} \cos(\beta_m x/L) \cos(\beta_m x'/L) \quad (3.12)$$

Avaliando a função G nos contornos tem-se

$$G(x,t/x',\tau) \Big|_{x'=0} = \frac{1}{2L} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau)/L^2} \cos(\beta_m x/L) \right) \quad (3.13)$$

e

$$G(x,t/x',\tau) \Big|_{x'=L} = \frac{1}{L} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau)/L^2} \cos(\beta_m x/L) \right) \quad (3.14)$$

substituindo as Eqs (3.11), (3.13) e (3.14) na Eq.(3.5) obtém-se a solução geral

$$\begin{aligned} T(x,t) = T_0 &+ (\alpha / L \cdot K) \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \\ &+ (2\alpha/L \cdot K) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \cos(\beta_m x/L) \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} \phi_1(\tau) d\tau + \\ &+ (\alpha / L \cdot K) \int_0^t \phi_2(\tau) d\tau + 2\alpha / L \cdot K) \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^m - 1] \\ &\cdot e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \cos(\beta_m x/L) \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} \phi_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

observa-se que $\phi_1(\tau)$ e $\phi_2(\tau)$ são os fluxos de calor definidos a partir de curvas de ajuste obtidas sobre os valores medidos com os transdutores de fluxo de calor aplicados nas superfícies da amostra. Apresenta-se a forma dos fluxos de calor medidos experimentalmente, os ajustes e o desenvolvimento dessas integrais no apêndice III.

Tendo estabelecido a solução formal do problema direto dado pelas Eqs

(3.1-3.4), estima-se os parâmetros K e α usando-se os valores medidos de temperatura tomadas nas superfícies da amostra. No método descrito por Beck & Arnold [31], estima-se a condutividade e difusividade térmica minimizando-se a função soma quadrática

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left[Y_j(i) - T_j(i) \right]^2 \quad (3.16)$$

com relação aos parâmetros envolvidos. Neste caso, $Y_j(i)$ representa as temperaturas experimentais e $T_j(i)$ as temperaturas calculadas através do modelo teórico, nas superfícies da amostra. K e α são os parâmetros estimados para a obtenção da melhor aproximação entre os valores medidos e os valores teóricos. Os subíndices j e i representam, respectivamente, o número de sensores, no caso dois termopares, e o instante de medições em forma discretizada. A forma de se minimizar S , dada pela Eq.(3.16) é fazer suas primeiras derivadas em relação aos parâmetros iguais a zero [31]. Desse modo obtém-se um conjunto de equações em K e α a ser resolvido simultaneamente para essas incógnitas. As derivadas parciais de S são

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left[Y_j(i) - T_j(i) \right] X_{j1}(i) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \left[Y_j(i) - T_j(i) \right] X_{j2}(i) \quad (3.18)$$

onde os coeficientes de sensibilidade, X_{js} , são definidos por

$$X_{11} = \frac{\partial T_1}{\partial K} \quad (3.19)$$

$$X_{21} = \frac{\partial T_2}{\partial K} \quad (3.20)$$

$$X_{12} = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \quad (3.21)$$

$$X_{22} = \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} \quad (3.22)$$

onde s designa os parâmetros a serem estimados.

A obtenção formal dos coeficientes de sensibilidade é apresentada no apêndice III. Obtém-se assim através da minimização da função S e o método de Gauss [31], as equações de recorrência para obtenção de K e α , como seguem

$$b_1^* = b_1 + \left[C_{22}(i+1).D_1(i+1) - C_{12}(i+1).D_2(i+1) \right] / |C| \quad (3.23)$$

$$b_2^* = b_2 + \left[-C_{21}(i+1).D_1(i+1) - C_{11}(i+1).D_2(i+1) \right] / |C| \quad (3.24)$$

onde b_1^*, b_2^* são os valores estimados de K e α , respectivamente para a k -ésima iteração, onde,

$$E_1(i+1) = Y_1(i+1) - T_1(i+1) \quad (3.25)$$

$$E_2(i+1) = Y_2(i+1) - T_2(i+1) \quad (3.26)$$

$$C_{11}(i+1) = C_{11}(i) + X_{11}(i+1).X_{11}(i+1) + X_{21}(i+1).X_{21}(i+1) \quad (3.27)$$

$$C_{12}(i+1) = C_{12}(i) + X_{11}(i+1).X_{12}(i+1) + X_{21}(i+1).X_{22}(i+1) \quad (3.28)$$

$$C_{21}(i+1) = C_{21}(i) + X_{12}(i+1).X_{11}(i+1) + X_{22}(i+1).X_{21}(i+1) \quad (3.29)$$

$$C_{22}(i+1) = C_{22}(i) + X_{12}(i+1).X_{12}(i+1) + X_{22}(i+1).X_{22}(i+1) \quad (3.30)$$

$$D_1(i+1) = D_1(i) + X_{11}(i+1).E_1(i+1) + X_{21}(i+1).E_2(i+1) \quad (3.31)$$

$$D_2(i+1) = D_2(i) + X_{12}(i+1).E_1(i+1) + X_{22}(i+1).E_2(i+1) \quad (3.32)$$

e

$$|C| = C_{11}(i+1).C_{22}(i+1) - C_{12}(i+1).C_{21}(i+1) \quad (3.33)$$

os parâmetros K e α podem então ser estimados através de um procedimento iterativo que converge segundo o critério abaixo

$$b_s^*{}^{K+1} - b_s^*{}^K < 0.0001, \quad \text{com } s=1,2 \quad (3.34)$$

O método de Gauss, o critério de minimização e a obtenção das equações de recorrência para os parâmetros b_1^* e b_2^* são apresentados no apêndice I. Como observado anteriormente, as soluções para as temperaturas superficiais e os coeficientes de sensibilidade são apresentados em sua forma completa no apêndice III.

3.3 - Implementação e Análise de Resultados

Apresenta-se neste parágrafo uma análise dos resultados obtidos, a partir da aplicação do método a uma amostra de polythene de dimensões 30x30x5 cm.

Devido à hipótese de propriedades constantes, admitida no parágrafo 3.2, um limite para diferença de temperatura entre as superfícies da amostra deve ser estabelecido. Nesse sentido, como a amostra padrão de polythene tem limites quanto à imposição de fluxo de calor muito altos em suas superfícies, nesse caso a temperatura máxima permitida é de 40 °C sendo que uma diferença de temperatura entre as superfícies extremas não deve ultrapassar a 15 °C [36], optou-se pela imposição de um fluxo de calor na superfície não superior a 200 W/m², com um tempo de exposição que não permite às superfícies alcançar a diferença de temperatura máxima especificada. Observa-se, todavia, que quanto menor o gradiente de temperatura na amostra, maior a representatividade do valor da propriedade em relação à temperatura média. Da otimização dessas condições depende, em grande parte, o sucesso do método de medição.

Realizou-se vários experimentos. Uma evolução típica de fluxo de calor aplicado é mostrada na Figura 3.2. Com a aplicação do fluxo de calor registra-se as evoluções de temperatura nas superfícies, como é ilustrado na Figura 3.3, e o fluxo de calor resultante na face oposta, Figura 3.4

Uma vez obtidas as evoluções experimentais das temperaturas e de posse da solução analítica dada pela Eq. (3.15), pode-se então obter as propriedades aplicando-se as Eqs (3.21) e (3.22).

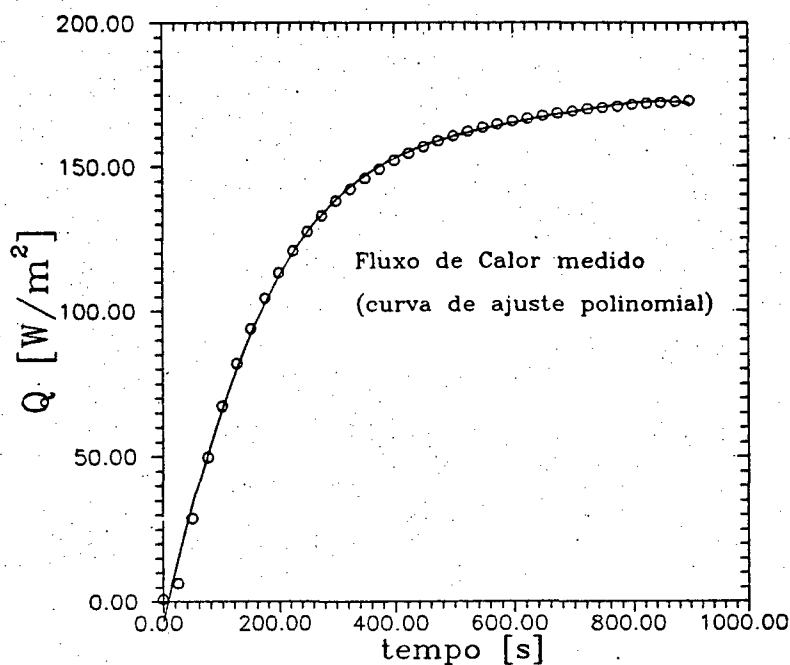


Figura 3.2 - Fluxo de calor aplicado na superfície frontal da amostra

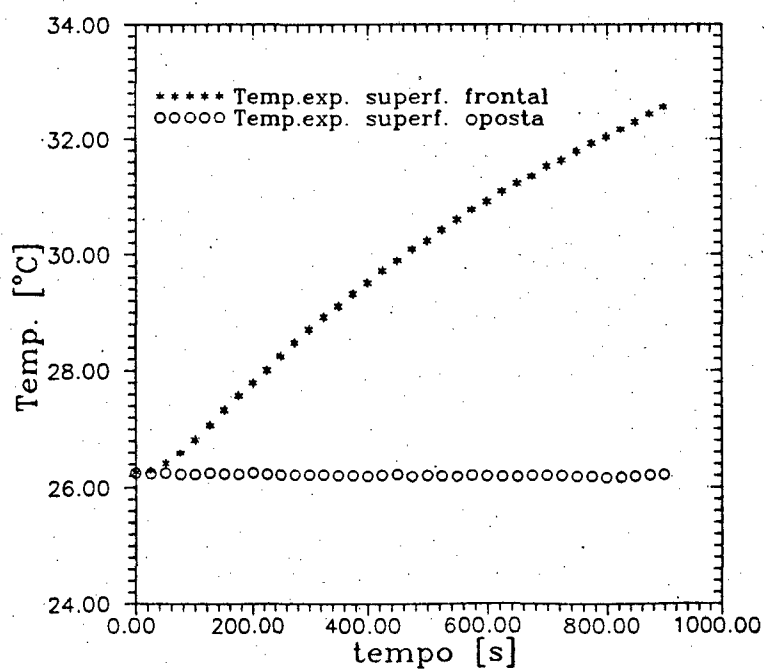


Figura 3.3 - Evolução transiente das temperaturas

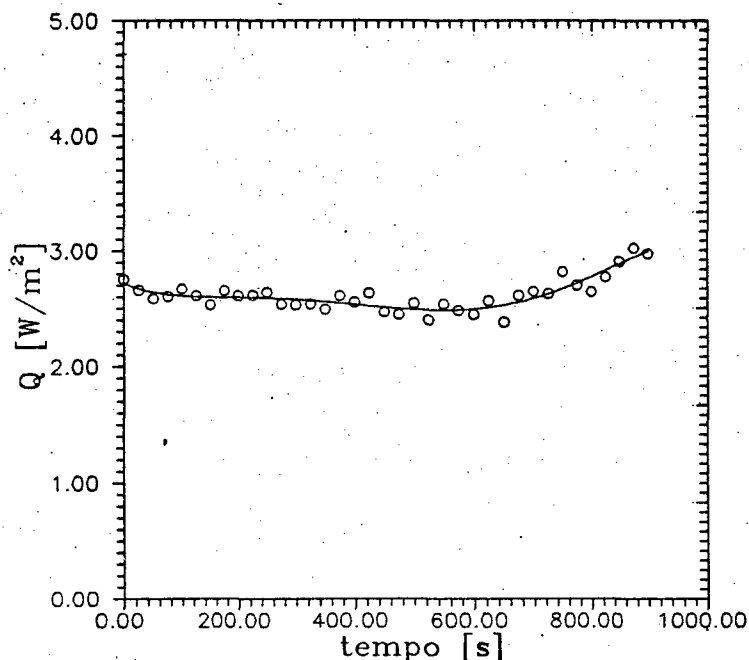


Figura 3.4 - Fluxo de calor resultante na superfície oposta da amostra

Todavia, uma característica importante deste método é a análise dos coeficientes de sensibilidade, definidos pelas Eqs. (3.19)-(3.20). Estes coeficientes são apresentados na Figura 3.5. Observa-se que a contribuição dos coeficientes relativos à face oposta é praticamente nula.

Este resultado inviabiliza o método para essas condições, ou seja, para a presente amostra e fluxo de calor aplicado. Isso se deve ao fato da função mínimos quadrados minimizada (Eq. 3.16), levar em consideração as temperaturas de ambas as superfícies. Uma análise atenciosa dos coeficientes sugere ainda um certo grau de dependência linear entre os coeficientes, como mostram as Figuras 3.6 e 3.7.

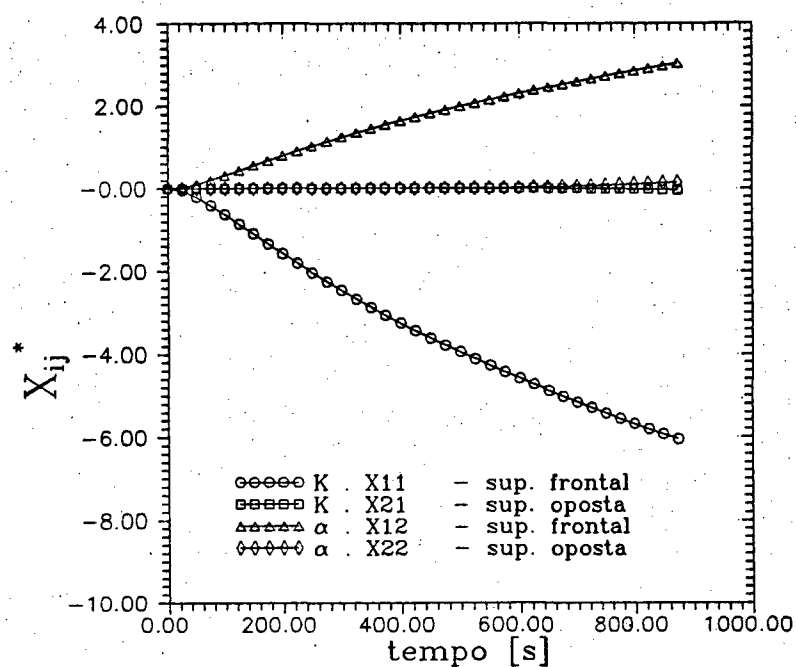


Figura 3.5 - Coeficientes de sensibilidade

Essa dependência linear torna-se mais explícita ao se analisar o determinante da matriz coeficiente de sensibilidade C_{ij} , $|C|$, como mostrado na Figura 3.8.

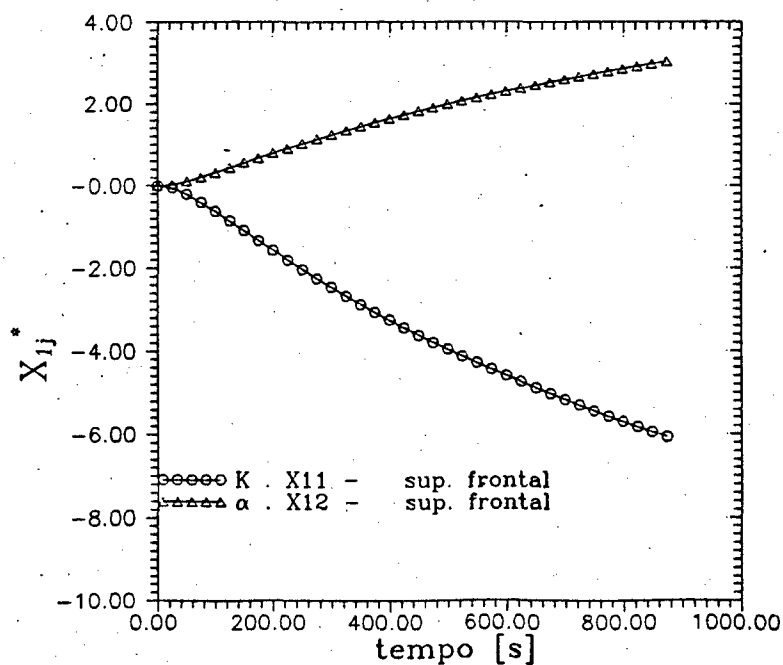


Figura 3.6 - Coeficientes de sensibilidade na superfície frontal

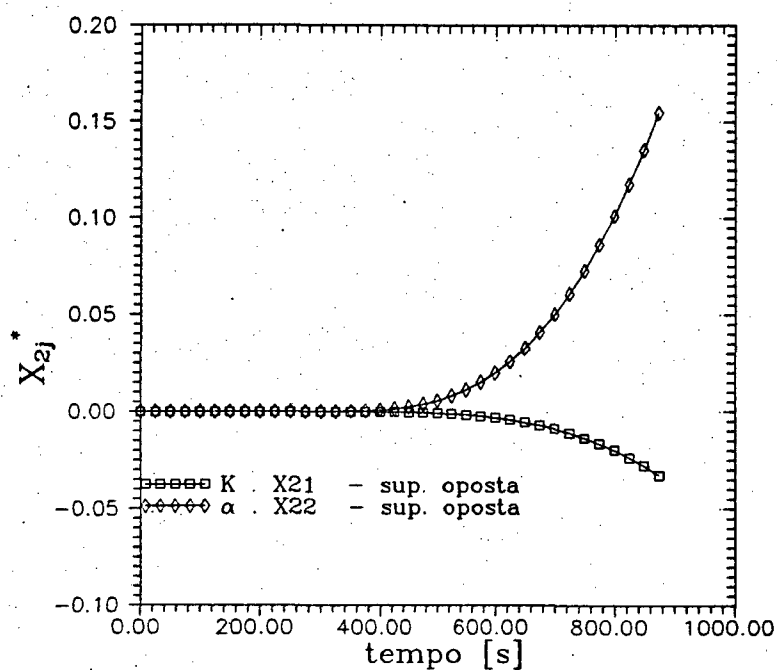


Figura 3.7 - Coeficiente de sensibilidade na superfície oposta

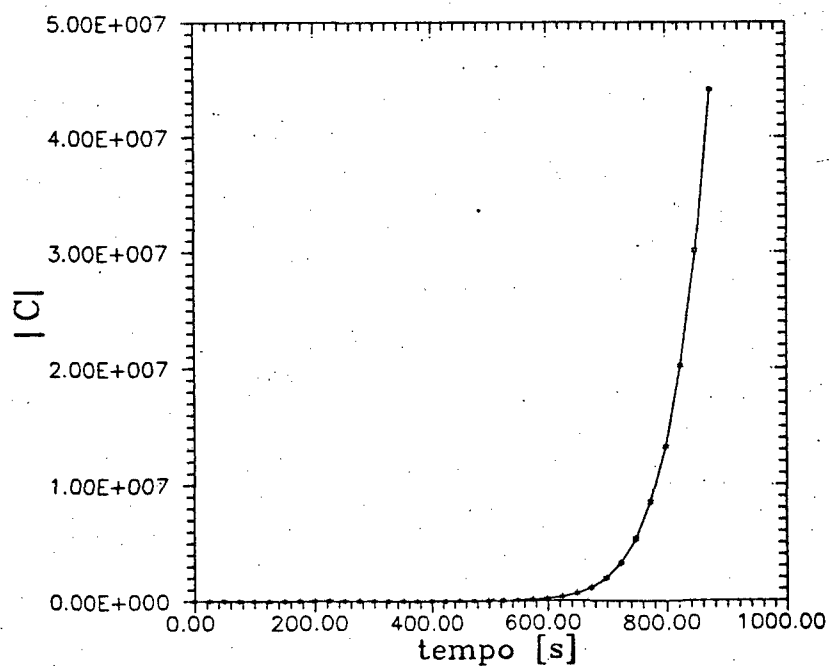


Figura 3.8 - Determinante da matriz coeficiente de sensibilidade

O determinante nulo indica dependência linear entre os coeficientes.

Observa-se que até 600 segundos existe uma dependência linear entre eles. A

partir desse instante a combinação se enfraquece, porém não o suficiente para que haja unicidade nas propriedades estimadas.

Esse resultado sugere a impossibilidade de obtenção das propriedades K e α de forma simultânea através do método I. A alternativa para contornar esse problema seria a aplicação de um fluxo de calor de maior intensidade, ou a diminuição da espessura da amostra. Seria possível então medir a evolução da temperatura na superfície oposta da amostra para intervalos de tempo relativamente pequenos. A Figura 3.9 mostra os coeficientes de sensibilidade, obtidos de uma simulação numérica, para uma amostra fictícia de espessura 15 mm, submetida a um mesmo fluxo de calor. Observa-se nesse caso que o valor do perfil de temperatura da superfície oposta aumentou significativamente, Figura 3.10, durante o intervalo de tempo correspondente ao experimento.

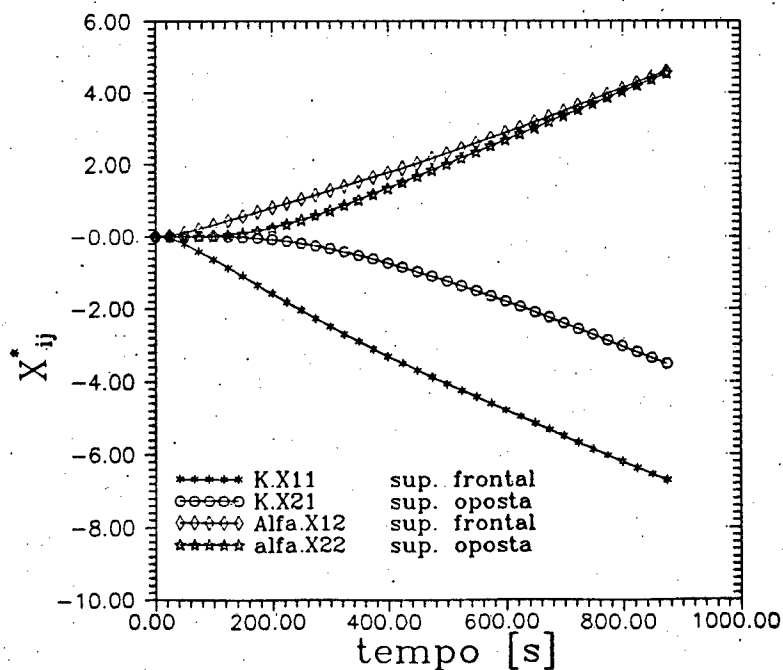


Figura 3.9 - Coeficientes de sensibilidade para uma amostra de polythene de 15 mm de espessura.

Ambas as hipóteses de espessura menor que 15 mm, e/ ou fluxo de calor intensos são entretanto inexequíveis, no presente trabalho, uma vez que as amostras são padronizadas, não podendo serem retificadas ou submetidas a grandes gradientes de temperatura. A inaplicabilidade do método para as condições da amostra em estudo, contudo, não o invalida. Nesse sentido, simulou-se a estimação das propriedades em uma amostra de polythene de espessura 15 mm. Na simulação a temperatura experimental foi obtida através da solução analítica a partir de valores de K e α iguais a 0,4 W/mK e $2,30 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ respectivamente. Partiu-se então de valores iniciais diferentes, como mostra a Tabela 3.1, obtendo-se os valores convergidos das propriedades com diferença inferior a 0,08% dos valores esperados. As Tabelas 3.1 - 3.3 mostram a evolução de uma estimativa das propriedades para diferentes valores iniciais de K e α . Observa-se que mesmo para valores iniciais bem distantes daqueles esperados, como $\alpha = 1,0 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ ou $K = 0,01 \text{ W/mK}$ há convergência.

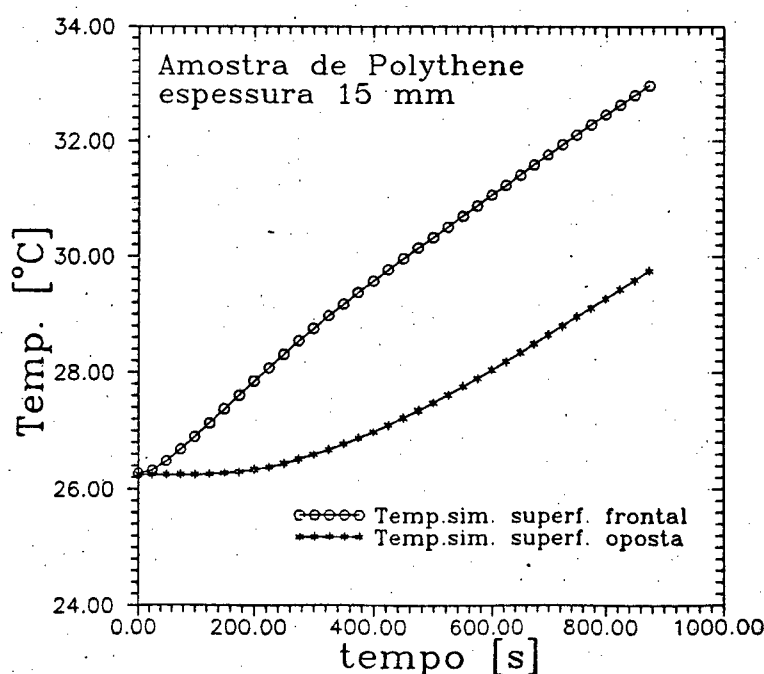


Figura 3.10 - Perfis de temperatura simulados para uma mostra de polythene de 15 mm de espessura

Tabela 3.1 - Simulação de estimação de parâmetros. Polythene, L = 15mm

Valores iniciais : K = 0,2 W/mK $\alpha = 1,50 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

K [W/mK]	$\alpha \times 10^7 [\text{m}^2/\text{s}]$	$S_{min} [^\circ\text{C}]^2$	iter
0,2	1,50	188,38	0
0,3036	1,931955	21,705	1
0,3776	2,217142	0,8291	2
0,3986	2,293787	0,00028	3
0,3998	2,297899	0,0000478	4
0,3998	2,297899	0,0000478	5

Tabela 3.2 - Simulação de estimação de parâmetros. Polythene, L= 15 mm

Valores iniciais : K = 0,1 W/mK , $\alpha = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

K [W/mK]	$\alpha \times 10^7 [\text{m}^2/\text{s}]$	$S_{min} [^\circ\text{C}]^2$	iter
0,1	1,0	1300,2	0
0,1811	1,404063	256,67	1
0,2845	1,850010	33,513	2
0,3680	2,179665	1,7106	3
0,3974	2,289277	0,000999	4
0,3998	2,297851	0,0000479	5
0,3998	2,297899	0,00004783	6
0,3998	2,297899	0,00004783	7

Tabela 3.3 - Simulação de estimação de parâmetros Polythene, $L = 15$ mm,
Valores iniciais : $K = 0,01$ W/mK, $\alpha = 10 \times 10^{-7}$ m²/s

K [W/mK]	$\alpha \times 10^7$ [m ² /s]	S_{min} [°C] ²	iteração
0,01	0,1	2,4236,0	0
0,0788	1,295211	5,420,3	1
0,1434	1,518215	1,095,9	2
0,2370	1,819853	1,70,71	3
0,3347	2,113886	0,14495	4
0,3894	2,269744	0,28632	5
0,3995	2,297214	0,0006728	6
0,3998	2,297899	0,0007834	7
0,3998	2,297899	0,0007833	8
0,3998	2,297899	0,0000783	9

A busca de um método transiente, que permitisse a obtenção simultânea da condutividade e da difusidade térmica a partir de medições de grandezas térmicas na superfície de um meio a ser investigado e agora, com características universais quanto ao material, no caso, não metálico e de espessura robusta (amostra de polythene com 50 mm de espessura), motivou-nos ao desenvolvimento de um segundo método transiente de medição de propriedades: o método de estimação de parâmetros no domínio da frequência, apresentado a seguir.

CAPÍTULO IV

Método II - Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência

4.1 - Introdução

De acordo como o que foi visto no capítulo anterior, a dependência linear entre os coeficientes no domínio do tempo para a amostra de polythene em estudo e a consequente impossibilidade de sua obtenção simultânea, requer, uma abordagem diferente do problema térmico. Mostra-se no presente capítulo que a partir do mesmo modelo experimental, mas com um tratamento sistêmico da amostra e estimando-se as propriedades no domínio da frequência, torna-se possível a determinação da condutividade e difusividade térmica simultaneamente.

4.2 - Desenvolvimento do Modelo Teórico

Utiliza-se nesse método o princípio de um sistema dinâmico tipo entrada/saída, para a determinação simultânea da condutividade e difusividade térmica. Nesse sentido, o problema de difusão de calor criado pelo modelo experimental, a partir da imposição de um fluxo de calor na superfície frontal da amostra, pode ser abordado pelo modelo teórico equivalente apresentado a seguir.

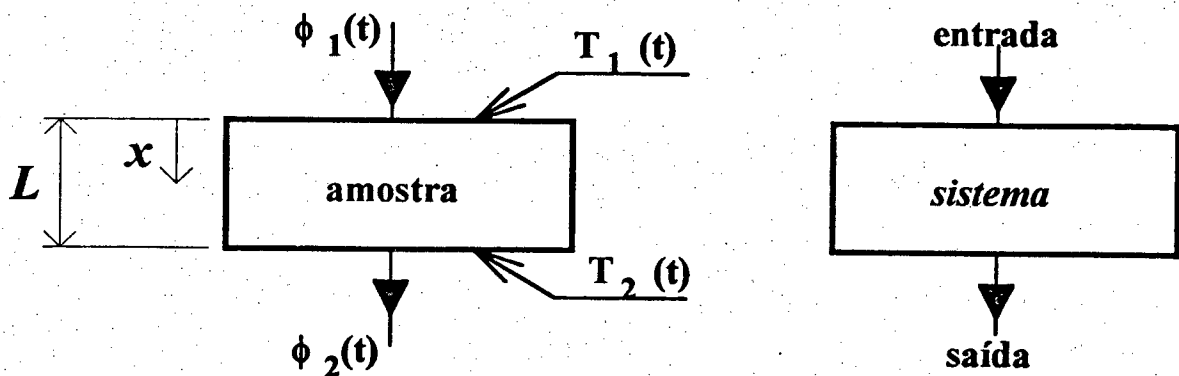


Figura 4.1 - Modelo térmico equivalente usado para estimação de propriedades no domínio da frequência

Descreve-se o problema pela equação da difusão de calor, a partir das hipóteses de amostra homogênea, propriedades térmicas constantes e fluxo de calor unidimensional, como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

sujeita às condições de contorno de temperatura

$$T(0,t) = T_1(t) \quad (4.2)$$

$$T(L,t) = T_2(t) \quad (4.3)$$

e de fluxo de calor

$$\phi(0,t) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (4.4)$$

$$\phi(L,t) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (4.5)$$

e a condição inicial

$$T(x,0) = T_0 \quad (4.6)$$

sendo que

$$\phi(x,t) = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad (4.7)$$

é a definição do fluxo de calor que atravessa a superfície na posição x para toda parede, $T_1(t)$ e $T_2(t)$ representam as evoluções das temperaturas e $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ as evoluções dos fluxos de calor através das superfícies frontal e oposta da amostra, respectivamente, como mostrado na Figura 4.1.

Definindo-se a variável

$$\theta = T - T_0 \quad (4.8)$$

onde T_0 é a temperatura inicial da amostra, o problema pode ser escrito

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.9)$$

com as respectivas condições de contorno

$$\theta(0,t) = \theta_1(t) \quad (4.10)$$

$$\theta(L,t) = \theta_2(t) \quad (4.11)$$

$$\phi(0,t) = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (4.12)$$

$$\phi(L,t) = -K \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (4.13)$$

e a condição inicial

$$\theta(x,0) = 0 \quad (4.14)$$

Tomando-se as transformadas de Laplace da Eq. (4.7) e das Eqs. (4.8-4.14) definidas por

$$\Theta(x,p) = \mathcal{L}[\theta(x,t)] \quad (4.15)$$

$$\Phi(x,p) = \mathcal{L}[\phi(x,t)] \quad (4.16)$$

e

$$\Theta(x,0^+) = 0 \quad (4.17)$$

obtem-se

$$\frac{\partial^2 \Theta(x,p)}{\partial x^2} = \frac{p}{\alpha} \cdot \Theta(x,p) \quad (4.18)$$

$$\Phi(x,p) = -K \frac{\partial \Theta(x,p)}{\partial x} \quad (4.19)$$

A solução da Eq. (4.18) é dada por

$$\Theta(x,p) = C_1 \cosh \sqrt{p/\alpha} \cdot x + C_2 \sinh \sqrt{p/\alpha} \cdot x \quad (4.20)$$

Obtem-se as constantes C_1 e C_2 aplicando-se as condições de contorno dadas pelas Eqs. (4.10-4.13) no plano transformado. Assim, a solução pode ser escrita em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{p/\alpha} \cdot L & \left(-K\sqrt{p/\alpha}\right)^{-1} \sinh \sqrt{p/\alpha} \cdot L \\ -K\sqrt{p/\alpha} \cdot \sinh \sqrt{p/\alpha} \cdot L & \cosh \sqrt{p/\alpha} \cdot L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde $\Theta_1 = \Theta(0,p)$, $\Theta_2 = \Theta(L,p)$, $\Phi_1 = \Phi(0,p)$ e $\Phi_2 = \Phi(L,p)$. Por simplificação pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

onde

$$A = \cosh \sqrt{p/\alpha} \cdot L \quad (4.23)$$

$$B = \left(-K\sqrt{p/\alpha} \right)^{-1} \cdot \sinh \sqrt{p/\alpha} \cdot L \quad (4.24)$$

$$C = K\sqrt{p/\alpha} \cdot \sinh \sqrt{p/\alpha} \cdot L \quad (4.25)$$

A solução matricial representada pela Eq. (4.22) é adequada ao tratamento do problema térmico na forma de um sistema com entrada e saída de sinais. Assim a identificação das propriedades K e α da amostra se dá a partir de seu tratamento do problema térmico como um sistema sujeito a um sinal de entrada do tipo

$$\sum \phi = \phi_1 + \phi_2 = X \quad (4.26)$$

correspondente à soma dos fluxos de calor nas superfícies e a um sinal de saída do tipo,

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = Y, \quad (4.27)$$

correspondente à diferença de temperatura nas superfícies da amostra, como mostra a Figura 4.2.

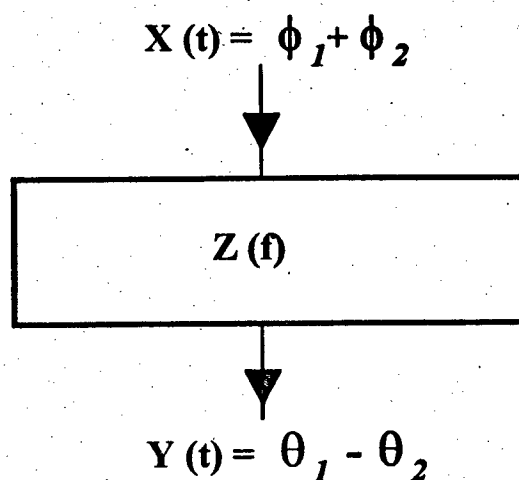


Figura 4.2 - Sistema dinâmico, tipo entrada/saída

A partir da Eq. (4.22) e das Eqs. (4.26) e (4.27) define-se a função $Z(p)$

$$Z(p) = \frac{\Delta \Theta}{\sum \Phi} = \frac{+ B}{1+A} = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (4.28)$$

onde Z é conhecida como impedância generalizada [37]. Substituindo as Eqs. (4.23-4.24) na Eq. (4.28) obtém-se

$$Z(p) = \left(1 / K \sqrt{p/\alpha} \right) \cdot \operatorname{tgh} \left(1/2 \cdot \sqrt{p/\alpha} \cdot L \right) \quad (4.29)$$

Para obter-se a inversa $Z(t)$ aplica-se a propriedade da transformada de Laplace [38]

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sinh x \sqrt{p}}{\sqrt{p} \cosh a \sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)\pi^2 t^2 / 4a^2} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2a} \quad (4.30)$$

fazendo $x = a$ pode-se escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\operatorname{tgh} a \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)\pi^2 t^2 / 4a^2} \frac{\sin(2n-1)\pi}{2} \quad (4.31)$$

ou ainda

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\operatorname{tgh} a \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right] = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)\pi^2 t^2 / 4a^2} \quad (4.32)$$

fazendo $a = \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{p}}$ na Eq.(4.29) e comparando com a Eq. (4.32)

obtem-se

$$Z(t) = \frac{4}{L} \frac{\alpha}{K} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \quad (4.33)$$

definindo $B = \frac{4}{L} \frac{\alpha}{K}$ e $A_n = (2n-1)^2 \pi^2 \alpha / L^2$ pode-se escrever

$$Z(t) = B \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n t} \quad (4.34)$$

Devido à característica dinâmica do sistema estima-se os parâmetros K e α através da comparação da função mínimos quadrados de Z em suas formas experimental e estimada no domínio da frequência. Ou seja, a identificação se dá através da aplicação da transformada de Fourier em $Z(t)$ nos dados

experimentais e teóricos, denominados $Z_e(f)$ e $Z_t(f)$, respectivamente.

Essa comparação a princípio poderia ser feita em $Z(t)$, ou seja na impedância generalizada no domínio do tempo. Entretanto, uma análise de sensibilidade aponta para uma combinação linear entre os coeficientes envolvidos. Esse fato impede a estimação simultânea de K e α , de forma análoga ao mostrado no Cap III.

A obtenção da impedância generalizada no domínio da frequência, $Z(f)$, se dá, por sua vez, aplicando-se a transformada de Fourier em $Z(t)$, ou seja, na impedância no domínio do tempo. Assim, define-se a função $Z(f)$ como

$$Z(f) = \int_0^{\infty} Z(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (4.35)$$

onde $j = \sqrt{-1}$.

Uma vez que $Z(f)$ é complexa, faz-se a estimação dos parâmetros no módulo e na fase. Torna-se assim necessário a obtenção teórica da impedância, $Z_t(f)$, em sua forma completa (módulo e fase) a partir do modelo já descrito, assim como a impedância, $Z_e(f)$, determinada experimentalmente. Assim, obtido $Z_t(f)$ e $Z_e(f)$, a estimação de K e α se dá através da minimização de S_{mod} e S_{fase} definidos como

$$S_{\text{mod}} = \sum \left(|Z_e| - |Z_t| \right)^2 \quad (4.36)$$

$$S_{\text{fase}} = \sum \left(\psi_e - \psi_t \right)^2 \quad (4.37)$$

Ψ_e e Ψ_t representam, respectivamente, os ângulos de fase teóricos e experimentais da impedância generalizada. Minimiza-se S_{fase} , Eq. (4.37), e consequentemente determina-se a difusividade térmica, usando-se o método de estimação de parâmetros descrito por Beck & Arnold [31], apresentado no apêndice I. Uma vez estimado o valor de α , o parâmetro $B = \frac{4\alpha}{L K}$, torna-se função exclusiva de K , sendo estimado através da minimização de S_{mod} , Eq. (4.36). Observa-se aqui, (veja parágrafo 4.3), que a fase é função somente da difusividade térmica. As Equações de recorrência para α e B são então obtidas fazendo-se suas derivadas parciais iguais a zero. Assim

$$\alpha^{m+1} = \alpha^m + X_1 \left(\Psi_e - \Psi_t \right) / X_1^2 \quad (4.38)$$

$$B^{n+1} = B^n + X_2 \left(|Z_e| - |Z_t| \right) / X_2^2 \quad (4.39)$$

onde $m, n = 1, 2, \dots$ e $X_1 = \frac{\partial |Z_t|}{\partial B}$ e $X_2 = \frac{\partial \Psi_t}{\partial \alpha}$ são os coeficientes de

sensibilidade. Os parâmetros α e B são estimados por um processo iterativo até que a diferença do parâmetro estimado entre as iterações atual e anterior seja inferior a 0.0001.

4.3 - Identificação Teórica de $Z_t(f)$

Aplicando-se a definição da transformada de Fourier dada pela Eq. (4.35) na Eq. (4.34) tem-se

$$Z_t(f) = \int_0^\infty B \sum_{n=1}^\infty e^{-A_n t} e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.40)$$

ou ainda

$$Z_t(f) = B \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(A_n + j2\pi f)t} dt \quad (4.41)$$

efetuando a integração obtém-se

$$Z_t(f) = B \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-(A_n + j2\pi f)t}}{-(A_n + j2\pi f)} \right|_0^{\infty} \quad (4.42)$$

logo

$$Z_t(f) = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(A_n + j2\pi f)} \quad (4.43)$$

multiplicando-se o argumento do somatório pelo seu conjugado tem-se

$$Z_t(f) = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(A_n + j2\pi f)} \frac{(A_n - j2\pi f)}{(A_n - j2\pi f)} \quad (4.44)$$

logo,

$$Z_t(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B A_n}{(A_n)^2 + (2\pi f)^2} - j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B 2\pi f}{(A_n)^2 + (2\pi f)^2} \quad (4.45)$$

e portanto determina-se o módulo e a fase de $Z(f)$ a partir das definições

$$|Z(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2} \quad (4.46)$$

e

$$\Psi_z(f) = \arctang \left(\text{Im}(f)/\text{Re}(f) \right) \quad (4.47)$$

onde $\text{Re}(f)$ e $\text{Im}(f)$ são as partes reais e imaginárias de $Z(f)$. Obtém-se assim o módulo

$$|Z_t(f)| = B \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(A_n)^2 + (2\pi f)^2} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{(A_n)^2 + (2\pi f)^2} \right)^2} \quad (4.48)$$

e a fase

$$\Psi_t(f) = \arctang \left[- 2\pi f \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(A_n)^2 + (j2\pi f)^2} \right) / \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(A_n)^2 + (j2\pi f)^2} \right) \right] \quad (4.49)$$

4.4 - Identificação Experimental de $Z_e(f)$

Sob condições ideais, a saída $Y(t)$ para o sistema mostrado pela Figura (4.2), sujeito a uma entrada $X(t)$ é dada pela integral de convolução

$$Y(t) = \int_0^{\infty} Z(\tau) X(t-\tau) d\tau \quad (4.50)$$

onde $Z(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, uma vez que o sistema é fisicamente definido, [42]. Portanto, do teorema da convolução, $Z_e(f)$ pode ser identificado (ver apêndice II) no domínio da frequência por

$$Z_e(f) = Y(f) / X(f) \quad (4.51)$$

onde as funções transformadas $Z_e(f)$, $Y(f)$ e $X(f)$ são definidas por

$$Z_e(f) = \int_0^{\infty} Z(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (4.52)$$

$$Y(f) = \int_0^{\infty} Y(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (4.53)$$

$$X(f) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (4.54)$$

Assim $X(f)$, $Y(f)$ e $Z_e(f)$ são números complexos do tipo $a + j b$, onde a e b são números reais. Obtém-se dessa forma $Z_e(f)$ pela simples divisão dos sinais de entrada e saída do sistema no domínio da frequência. A obtenção de $Z_e(f)$ ocorre uma vez que $Y(f)$ e $X(f)$ são os dados experimentais obtidos no plano transformado de $\Delta\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ e $\Sigma\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$, respectivamente. As transformadas de Fourier de $X(t)$ e $Y(t)$ são determinadas numericamente através do algoritmo de Cooley-Tukey da transformada discreta rápida de Fourier (Discrete Fast Fourier Transform) [39]. Uma forma interessante de se obter numericamente $Z(f)$ é multiplicando-se $X(f)$ e $Y(f)$ na Eq. (4.48) por $X^*(f)$, ou seja o conjugado complexo de $X(f)$. Assim,

$$Z_e(f) = \frac{X^*(f) Y(f)}{X^*(f) X(f)} = \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} \quad (4.55)$$

onde S_{xy} e S_{xx} representam, respectivamente as funções densidade espectral cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$ e densidade autoespectral de $X(t)$. A identificação de $Z_e(f)$ através da Eq. (4.55) permite uma maior segurança no cálculo numérico da impedância devido às características estáveis das funções de

densidade espectral.

Assim, escreve-se $Z(f)$ na sua forma polar como

$$Z(f) = |Z(f)| e^{-j \Psi_z(f)} \quad (4.56)$$

onde

$$|Z(f)| = \frac{|S_{xy}(f)|}{S_{xx}(f)} \quad (4.57)$$

$$\Psi(f) = \psi_{xy}(f) \quad (4.58)$$

sendo $|Z_e(f)|$ e $\Psi(f)$, o módulo e a fase de $Z(f)$, respectivamente. De forma análoga $|S_{xy}|$ e ψ_{xy} , são, respectivamente o módulo e a fase de S_{xy} . A função densidade autoespectral S_{xx} é uma função real (ver apêndice II).

4.5 - Determinação de K e α

Observa-se da Eq. (4.49) que a fase é função exclusiva de α . Nesse caso, faz-se a minimização de S_{fase} considerando-se como parâmetro apenas a difusividade térmica. Na verdade, isso implica na determinação de forma independente dessa propriedade. Assim, aplicando-se a derivada de α na Eq. (4.36) e o critério de minimização de Gauss, obtém-se a equação de recorrência para α , ou seja

$$\alpha^{(m+1)} = \alpha^{(m)} + X_1 \left(\Psi_e - \Psi_t \right) / X_1^2 \quad (4.59)$$

onde X_1 é o coeficiente de sensibilidade da fase em relação à difusividade térmica e m o número de iterações. Obtém-se X_1 derivando-se a fase Ψ_t em relação à difusividade térmica, ou seja

$$X_1 = \frac{\partial \Psi_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 + r^2} \cdot r' \quad (4.60)$$

sendo $r' = (v' \cdot w - v \cdot w') / w^2$, onde

$$v = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi f}{A_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (4.61)$$

$$v' = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2\pi f \cdot 2A_n \cdot A_n^*}{A_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (4.62)$$

$$w = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n}{A_n^2 + (2\pi f)^2} \right) \quad (4.63)$$

$$w' = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n^* \left(-A_n + (2\pi f)^2 \right)}{\left(A_n^2 + (2\pi f)^2 \right)^2} \right] \quad (4.64)$$

sendo $A_n^* = A_n / \alpha$. Observa-se que a equação de recorrência foi obtida aplicando-se a forma geral de estimação de parâmetros, apresentada no apêndice I, dada pela Eq. (AI-47), para o caso simples de um parâmetro estimado.

Uma vez determinado o valor da difusividade térmica, o módulo da impedância generalizada, passa a ser um função exclusiva de B e, consequentemente de K . Assim, novamente aplicando-se o critério de minimização de Gauss, agora na função S_{mod} obtém-se a equação de recorrência para o parâmetro B , função exclusiva de K . Assim,

$$B^{(n+1)} = B^{(n)} + X_2 \left(|Z_e| - |Z_t| \right) / X_2^2 \quad (4.65)$$

onde X_2 é o coeficiente de sensibilidade do módulo de Z em relação ao parâmetro B . A variável n representa o número de iterações. Obtém-se X_2 derivando-se $|Z_t|$ em relação a B , ou seja,

$$X_2 = \frac{\partial |Z_t|}{\partial B} = \frac{|Z_t|}{B} \quad (4.66)$$

Observa-se ainda que para ambos os parâmetros, considera-se o processo iterativo como convergido até que a diferença do parâmetro estimado entre as iterações atual e anterior seja inferior a 0.0001.

Uma vez identificado o parâmetro B , obtém-se a condutividade térmica através da equação que define B , ou seja

$$B = \frac{4 \cdot \alpha}{L \cdot K} \quad (4.67)$$

e portanto

$$K = \frac{4 \cdot \alpha}{L \cdot B} \quad (4.68)$$

É interessante observar que a alternativa da estimação das propriedades térmicas no domínio da frequência, surgiu através da análise dos coeficientes de sensibilidade da impedância generalizada, $Z(t)$, no domínio do tempo. Ou seja, observou-se que havia uma dependência linear da condutividade térmica e da difusividade térmica em sua forma temporal. Nesse sentido, uma característica particular desse método reside no fato da fase ser uma função exclusiva da difusividade térmica - o que na prática separa a obtenção das propriedades térmicas dando uma certeza de unicidade

aos valores estimados. Contorna-se assim, o ponto mais sensível da técnica de estimação de parâmetros.

4.6 - Implementação do Método e Análise dos Resultados

4.6.1 - Introdução

Apresenta-se neste parágrafo uma análise dos resultados do método proposto para uma amostra de polythene de dimensões 30x30x5 cm. Todo procedimento experimental e os conjuntos de dados necessários à sua realização são apresentados aqui.

De forma análoga à estimação de parâmetros no domínio do tempo, admite-se também a hipótese de propriedades constantes (veja parágrafo 4.2). Uma vez que o modelo matemático não prevê a variação da condutividade e a difusividade térmica com a temperatura, obtém-se, nesse caso, essas propriedades a uma temperatura previamente determinada. Assim, o calor imposto na amostra deve ser suficiente para o estabelecimento de um campo térmico na amostra que permita a identificação das propriedades e ao mesmo tempo garanta a representatividade de uma temperatura média. Nesse caso, limitou-se a diferença máxima de temperatura entre as superfícies da amostra em 4 °C. Os valores das propriedades térmicas são, assim, estimados para uma temperatura média de 29°C entre os limites de 25°C e 31°C. Nesse caso, os limites quanto à exposição da amostra a grandes gradientes de temperatura foram respeitados (veja Cap.III).

4.6.2 - Determinação de α e K no Domínio da Frequência

Foram realizados 19 experimentos para a obtenção das propriedades. A temperatura ambiente foi controlada em ± 1 °C, sendo que nenhum experimento situou-se fora da faixa de 22 a 28 °C. A Tabela 4.1 lista alguns dos parâmetros mais importantes para a caracterização de cada experimento.

Tabela 4.1 - Caracterização dos experimentos: fluxo de calor máximo, Q_{\max} , e fluxo de calor inicial, Q_0 , na superfície frontal; temperaturas iniciais, respectivamente, T_{s1} e T_{s2} nas superfícies frontal e oposta e temperatura média entre T_{s1} e T_{\max} .

Nº Exp.	Fl. calor [W/m ²] sup. oposta / front		Temperaturas [°C]			
	Q_{01}	Q_{02}	Temp. inic. T_{s1}	T_{s2}	T_{\max}	T_{med}
01	0,245	3,54	28,03	28,00	31,60	29,82
02	1,84	0,74	28,53	28,42	32,05	30,29
03	0,35	2,69	30,42	30,47	33,82	32,12
04	-0,93	6,40	26,79	26,61	30,25	28,52
05	1,15	1,78	27,42	27,48	30,83	29,12
06	-0,06	5,17	25,35	25,19	28,82	27,08
07	0,50	4,12	28,43	28,36	31,92	30,18
08	0,10	4,54	25,49	25,36	29,03	27,26
09	0,18	4,85	24,84	24,70	28,31	26,58
10	0,94	2,34	25,49	25,43	28,95	27,22
11	1,15	0,56	28,06	28,12	31,79	29,93
12	1,75	0,27	26,12	26,19	29,70	27,91
13	2,12	0,20	26,96	26,99	30,51	28,74
14	1,70	0,38	27,15	27,23	30,70	28,92
15	1,12	0,70	26,50	26,58	29,97	28,23
16	1,67	0,39	27,03	27,08	30,63	28,83
17	-0,21	1,43	28,13	28,33	31,82	28,23
18	1,74	0,38	28,10	28,21	31,70	29,90
19	1,38	0,56	25,78	25,85	29,29	27,53

Os experimentos de número 12 a 19 foram realizados após mudança na posição

dos termopares, transdutores de fluxo de calor e posição da fonte de aquecimento, gerando-se o calor na superfície inferior da amostra.

Apresenta-se nas Figuras 4.3 e 4.4. os perfis típicos dos sinais de entrada e saída do sistema.

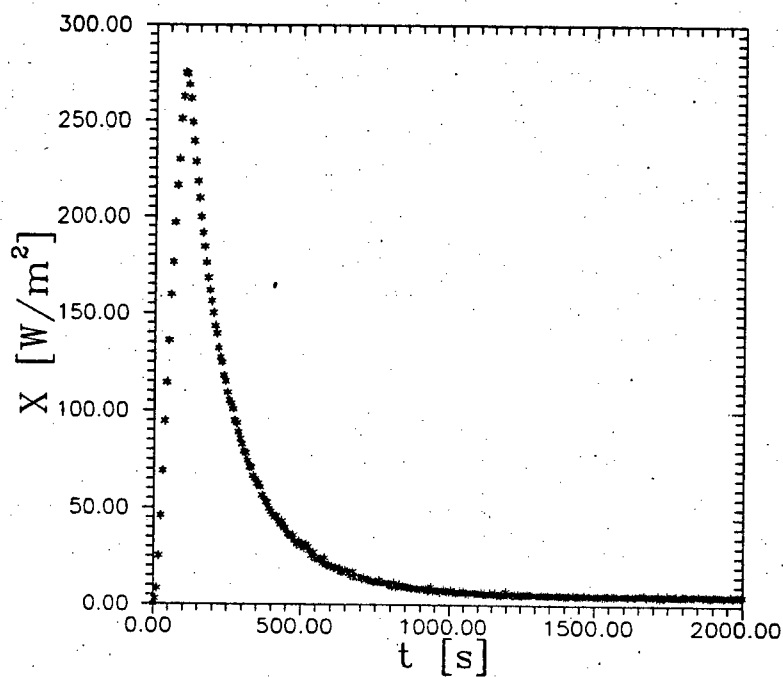


Figura 4.3 - Perfil típico de um sinal de entrada

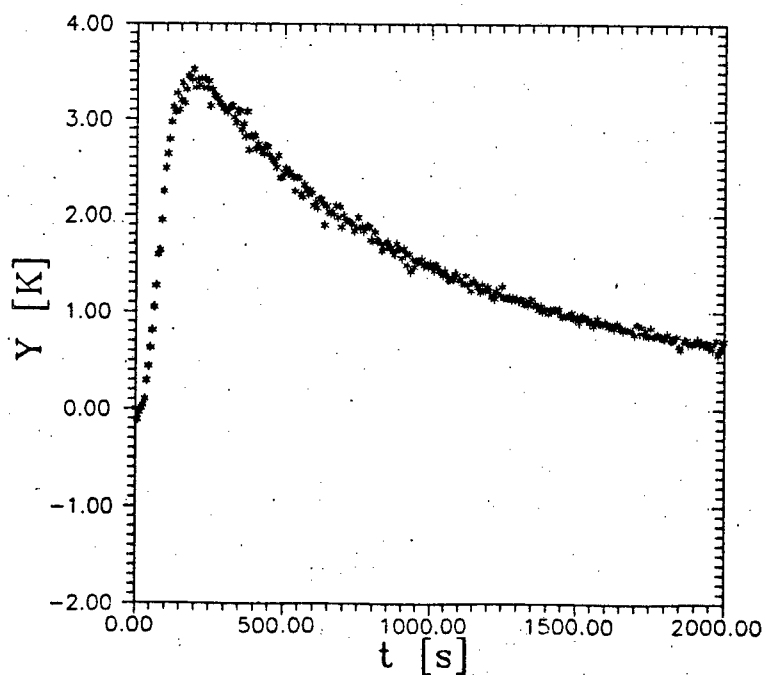


Figura 4.4 - Perfil típico de um sinal de saída

Cada experimento teve um intervalo de amostragem de sinal de 6.2 segundos com um número de 1024 pontos. A duração do aquecimento foi em torno de 90 segundos.

As Figuras 4.5 - 4.8 apresentam, respectivamente, as densidades auto espectrais da entrada, X , da saída, Y , e as componentes real e imaginária da densidade espectral cruzada. Nesse caso, apresenta-se as densidades alisadas (valores médios) para todos os experimentos, $n_d = 19$. Através do comportamento da densidade autoespectral, densidade espectral cruzada e a equação para obtenção experimental da função resposta em frequência (Eq.(4.55)), pode-se determinar a frequência de interesse ou também chamada banda de análise. Nesse sentido, a partir de frequência superiores a $4,55 \times 10^{-3}$ Hz, a função resposta em frequência deixa de existir no domínio dos números complexos, uma vez que se anulam os valores da densidade autoespectral (veja Figura 4.5 e Eq.(4.55)). Todavia, a banda de análise pode ainda ser diminuída se considerarmos que a partir de frequências superiores a $3,0 \times 10^{-3}$ Hz o valor da densidade espectral cruzada se anula (Figuras 4.7 e 4.8), o que implica também num valor nulo para a função resposta em frequência. Assim, os valores de interesse de frequências para os quais a função resposta em frequência, ou impedância generalizada, existem e são diferentes de zero situam-se na faixa de 0 a $3,0 \times 10^{-3}$ Hz. Este é um resultado significativo, no sentido de se definir parâmetros importantes para o processamento dos sinais, como o intervalo de amostragem e o número total de pontos e ainda auxiliar na análise de sensibilidade, imprescindível na determinação das propriedades.

Nesse sentido, como a determinação de α se dá através da técnica de estimação de parâmetros, é interessante analisar-se o comportamento dos coeficientes de sensibilidade com a frequência.

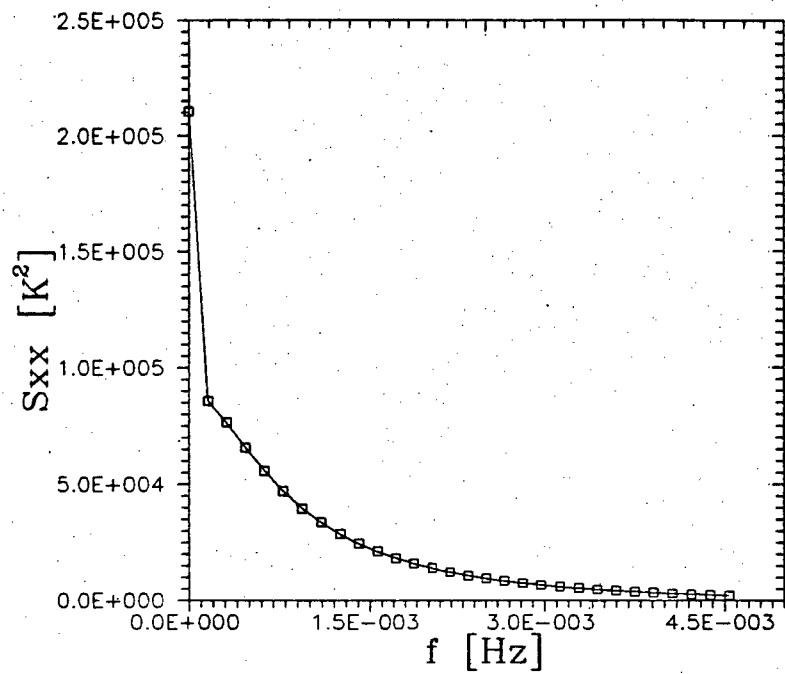


Figura 4.5 - Densidade auto espectral da entrada, $S_{xx}(f)$

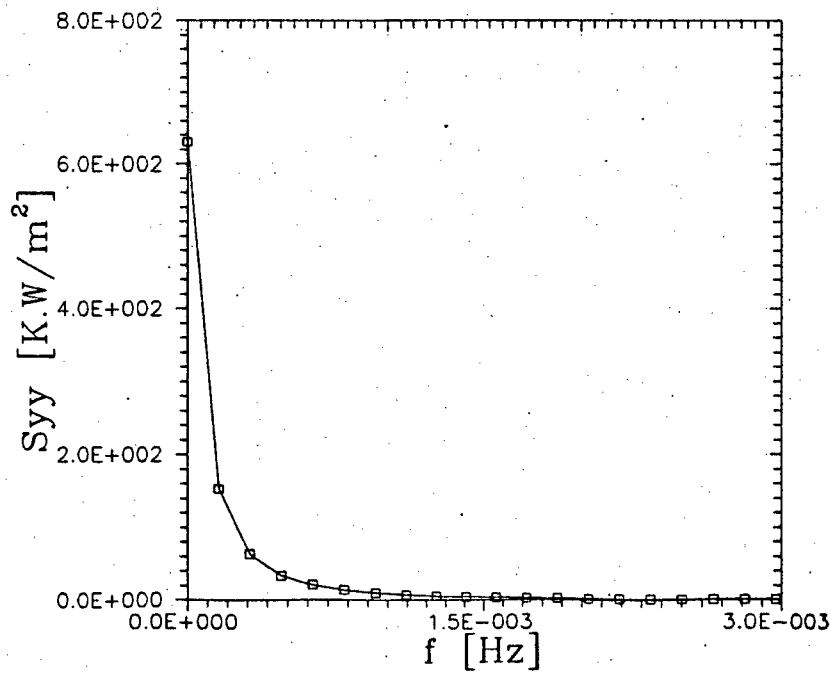


Figura 4.6 - Densidade auto espectral da saída, $S_{yy}(f)$

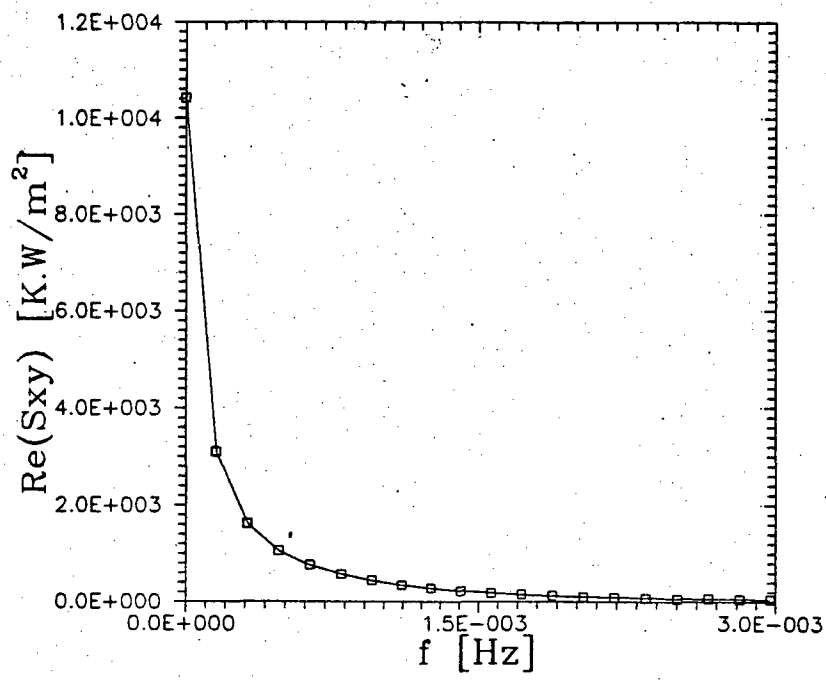


Figura 4.7 - Componente real da densidade espectral cruzada, $\text{Re}(S_{xy}(f))$

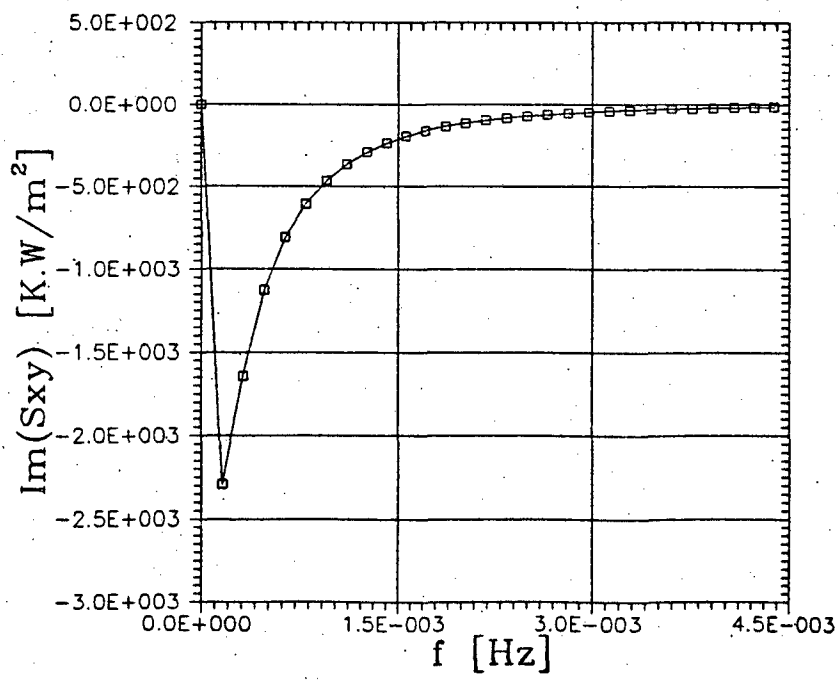


Figura 4.8 - Componente imaginária da densidade espectral cruzada, $\text{Im}(S_{xy}(f))$

As Figuras 4.9 e 4.10, respectivamente, são relativas aos coeficientes de sensibilidade X_1 associado a α e X_2 associado a B , definidos nas Eqs. (4.60) e (4.66). Observa-se da Figura 4.9 que para a estimação de α somente os 5 primeiros valores são significativos para o processo. A partir de frequências $1,0 \times 10^{-3}$ Hz, X_1 torna-se constante, não contribuindo com a estimação. Por sua vez o comportamento de X_2 permite trabalhar com um maior número de pontos. Todavia, todas as estimações foram feitas com os valores experimentais e calculados para os três primeiros pontos da fase e os sete primeiros do módulo da impedância generalizada, $Z(f)$. Observa-se ainda que para a estimação dos parâmetros não se utilizou os valores correspondentes à frequência nula uma vez que essa frequência representa o nível DC dos sinais de entrada e saída, não tendo significado físico na função resposta em frequência, ou seja na impedância generalizada.

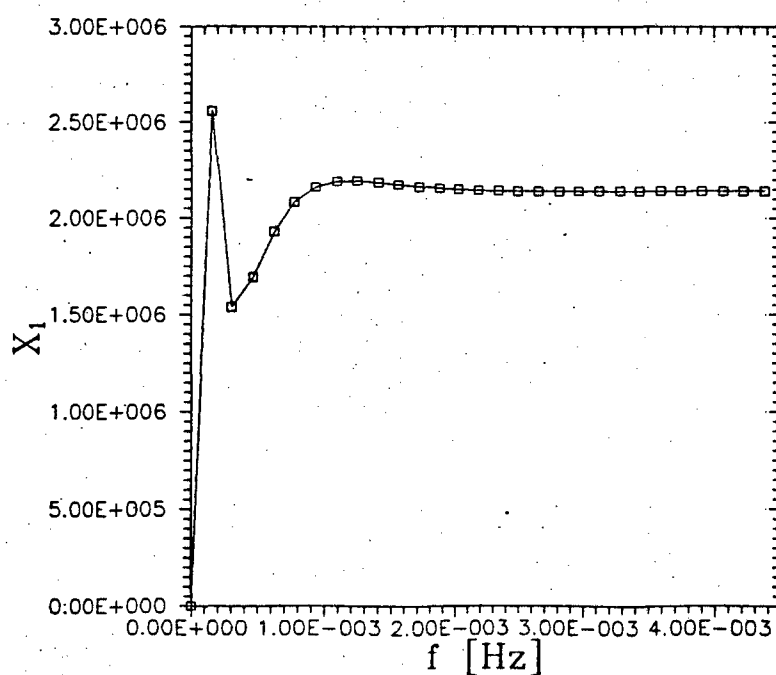


Figura 4.9 - Coeficiente de sensibilidade, X_1

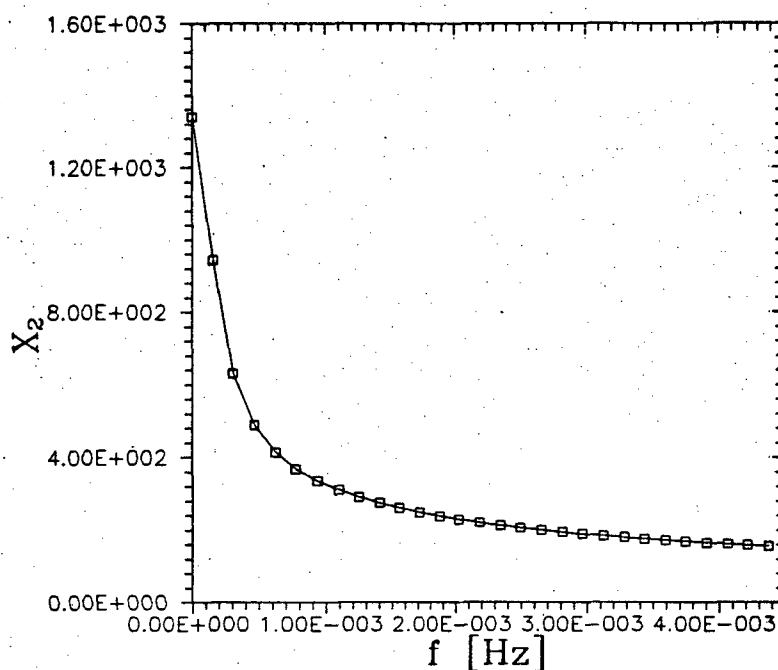


Figura 4.10 - Coeficiente de sensibilidade, X_2

A Tabela 4.2 apresenta os resultados de uma estimação de α e K para o sub-conjuntos de experimentos de números 1-11. Os resultados da estimação para os experimentos 1-19, 1-11, 12-19, conforme a Tabela 4.1, são apresentados na Tabela 4.3. A dispersão dos sub-conjuntos é calculada em relação ao conjunto total das amostras, $n_d = 19$.

As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam o módulo e a fase da função resposta em frequência com seus valores estimados e experimentais, para o conjunto total da amostras, $n_d = 19$.

Tabela 4.2 - Simulação de estimação de parâmetros. Experimentos de número 1-11. Valores iniciais: $K = 0,35$ e $\alpha = 2,1 \times 10^{-7}$

iter a	$\alpha \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$	$S_{\text{fase}} \times 10^8$	iter b	$B \cdot 10^{+05}$	$K [\text{W/mK}]$	$S_{\text{mod}} \times 10^7$
0	2,10000	86000	0	5,25088	0,350	780
1	2,19098	24000	1	4,62244	0,397	2,01
2	2,24119	6900	2	4,62244	0,397	2,01
3	2,26801	1810				
4	2,28211	501				
5	2,28946	131				
6	2,29528	35,1				
7	2,29630	9,81				
8	2,29684	3,31				
9	2,29711	1,80				
10	2,29726	1,50				
11	2,29726	1,50				

Tabela 4.3 - Resultados para a estimação de K e α Amostra de Polythene $L = 50 \text{ mm}$.

No. exp.	$\alpha \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$	$K [\text{W/mK}]$	Erro % K	Erro % α
01-19	2,33	0,389		
01-11	2,29	0,398	2,31	1,72
12-19	2,37	0,377	3,09	1,72

Observa-se na Figura 4.12 que a partir da frequência $1,0 \times 10^{-3} \text{ Hz}$ uma pequena dispersão se apresenta entre o valor estimado e experimental, ficando abaixo de 1,0 %. Esse efeito deve-se ao cálculo numérico da transformada de Fourier dos sinais de fluxo e temperatura. Uma forma de reduzi-los é aumentando-se o número de pontos, N e reduzindo-se o intervalo de amostragem, Δt . Observa-se contudo, que o número de pontos usado, $N = 1024$ e $\Delta t = 6,242$ foram selecionados considerando-se a sensibilidade dos parâmetros envolvidos: fonte de calor, amostra, temperatura, fluxo de calor

e, a capacidade de armazenamento de dados dos equipamentos utilizados.

Nesse sentido, como o método da transformada discreta de Fourier exige um número de pontos que seja múltiplo de potência 2, o próximo número a ser usado seria 2048 pontos. A combinação desse número com os 4 sinais a serem amostrados excedem a capacidade de memória dos equipamentos de aquisição de dados disponíveis. Observando-se ainda, que a dispersão é pouco significativa, tal investimento não foi realizado.

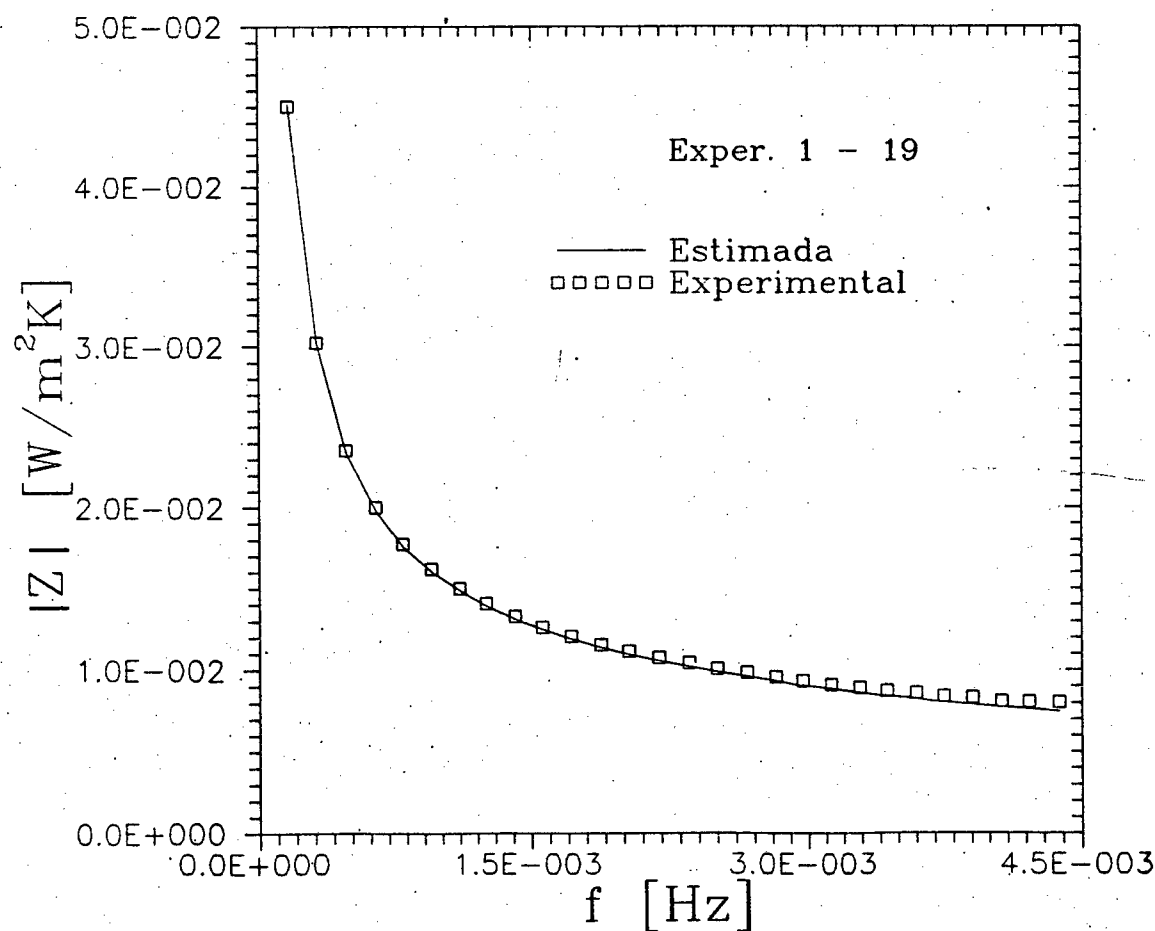


Figura 4.11 - Módulo da impedância generalizada

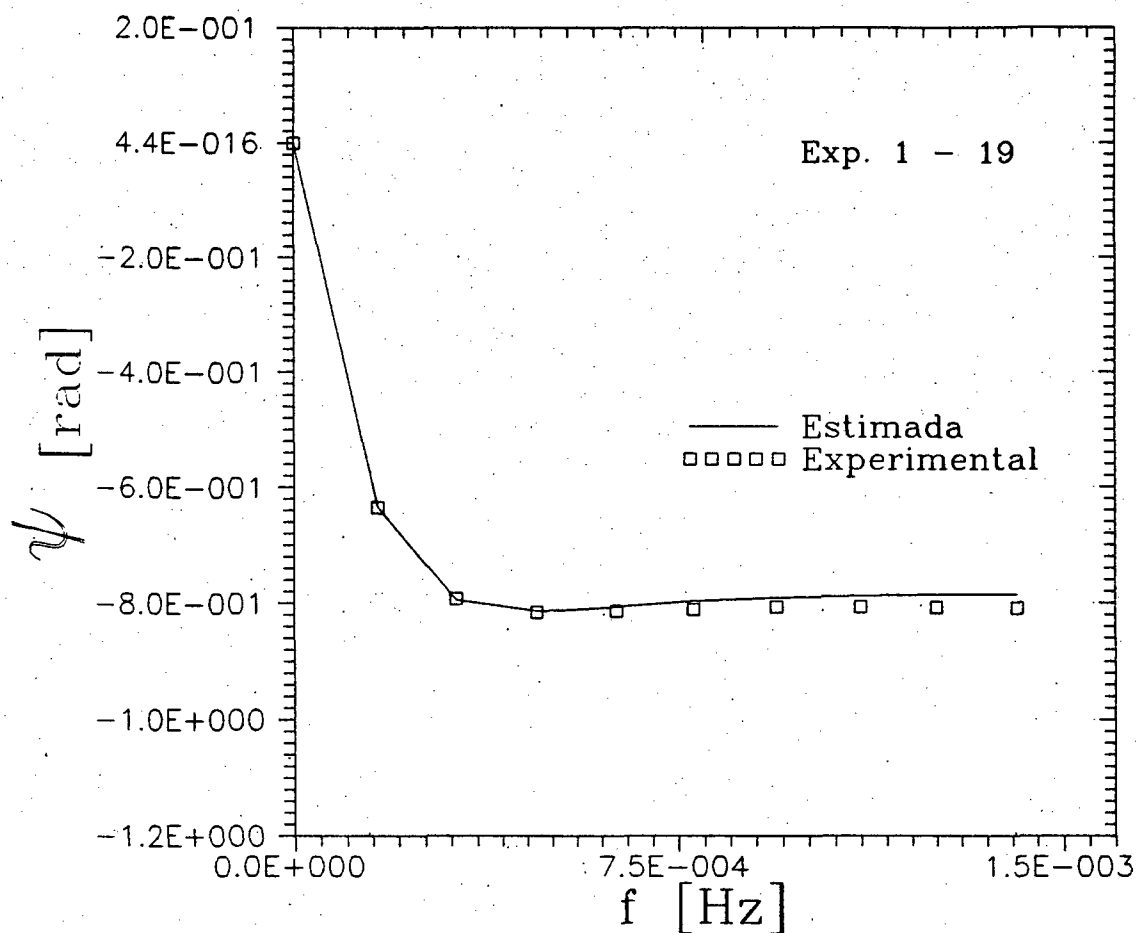


Figura 4.12 - Fase da impedância generalizada

4.7 - Resultados da Estimação de K e α da Amostra de Polythene

Portanto, a amostra de polythene de espessura 50 mm de espessura e área $30 \times 30 \text{ cm}^2$ tem valores da condutividade e difusividade térmica estimados em

$$K = 0,389 \text{ W/mK} \pm 3,1\%$$

e

$$\alpha = 2,33 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \pm 1,7\%$$

avaliados à uma temperatura média de $29,0^\circ\text{C}$. Observa-se que o valor da

condutividade térmica desse material, obtido pelo método da placa quente protegida, fornecido pela National Physical Properties of England, (NPL) [36], para essa temperatura é de $0,40 \text{ W/mK}$. O valor de K fornecido pelo NPL tem uma incerteza de 2%. A dispersão entre os valores, estimado pelo método transiente proposto e em regime permanente, situa-se em 2,8 %, e portanto dentro da faixa de incerteza do método desenvolvido.

CAPÍTULO V

Descrição da Bancada Experimental, Sistema de Aquisição e Análise de Erros

5.1 - Aparato Experimental

O aparato experimental mostrado na Figura 5.1a é projetado para a obtenção das condições de contorno (Figura 5.1.b). Ambos os métodos

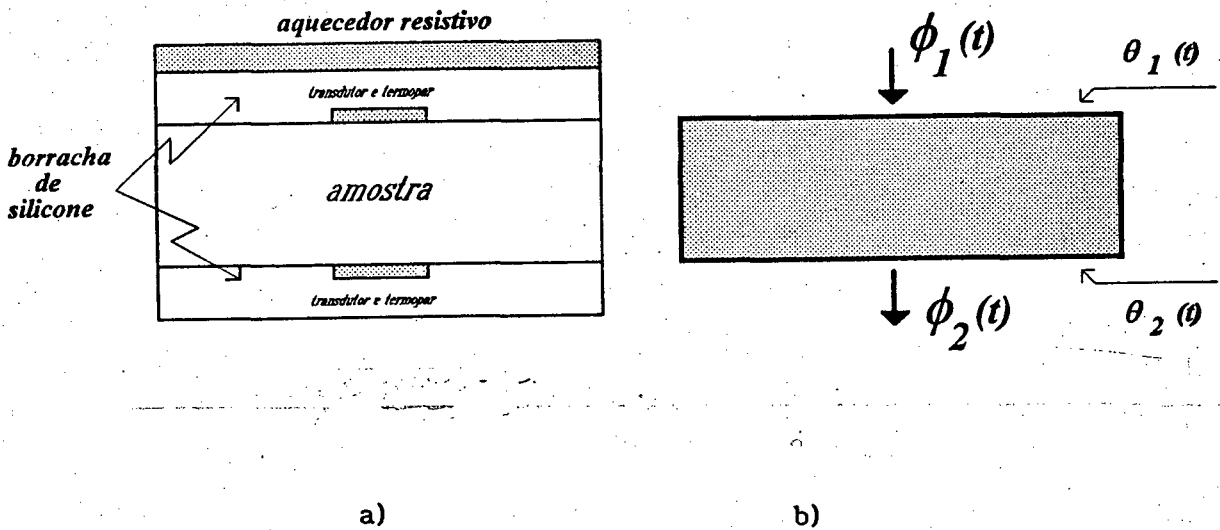


Figura 5.1 - a) Aparato experimental

b) modelo térmico equivalente

propostos envolvem a aplicação de um fluxo de calor uniforme e unidimensional num instante inicial, $t=0$, na superfície superior da amostra, $x=0$, que se encontra inicialmente a uma temperatura uniforme, T_0 . A condutividade e a difusividade térmica são calculadas a partir do modelo matemático, dos dados adquiridos e das dimensões da amostra. A fonte de

calor é um aquecedor resistivo, revestido externamente com borracha de silicone, com dimensões 305 X 305 X 1,40 mm e especificações de potência e tensão máximas de 720 W e 120 V, respectivamente, fabricado pela Watlow Electric Mfg. Co.. O fluxo de calor aplicado na superfície superior, ϕ_1 , assim como o que alcança a superfície oposta, ϕ_2 , são medidos por transdutores de fluxo de calor de dimensões 50 X 50 mm, espessura inferior a 0.3 mm e constante de tempo inferior a 10 ms, desenvolvido pelo Cresmat, Centre de Recherche en Science des Matériaux e Techniques de Construction da Universidade de Lille 1 [34], previamente calibrados no Laboratório de Meios Porosos e Propriedades Termofísicas de Materiais da Universidade Federal de Santa Catarina [40]. As evoluções de temperatura nas superfícies das amostras, são medidas através de termopares superficiais do tipo J, também previamente calibrados [40]. Uma espuma de silicone, de dimensões 305 X 305 X 3 mm é usada para preenchimento das bolsas de ar existentes entre o aquecedor e a amostra na região fora de contato com os fluxímetros e termopares e obtenção de um melhor contato térmico entre esses.

O sistema de aquisição de dados usado é o HP 3852A, Data Acquisition/Control Unit com voltímetro integrador e chave multiplexadora. Operou-se o sistema na faixa de temperatura entre 18 - 28 °C e auto-zero na posição 'on' com NPLC = 1, faixa de 30 mV e com aquecimento prévio de uma hora (warm up).

5.2 Análise de Erros

5.2.1 -Introdução

O processo de medição de grandezas físicas como temperatura ou fluxo

de calor baseia-se na comparação de uma variável desconhecida com um valor de referência. Todavia, vários fatores associados ao processo de medição interferem nesse processo, produzindo valores medidos não exatos. Os desvios são o resultado de erros inerentes à técnica de medição, ao valor padrão de referência e à resolução do equipamento de medição. Desse modo, qualquer valor medido é inexato e deve ser tratado com cuidado [41]. Uma vez que a obtenção das propriedades térmicas K e α é resultado dessas medições é natural que os seus valores sejam da mesma forma inexatos. Todavia, erros oriundos de um processo de medição devem ser analisados para a consequente consideração de sua relevância. A minimização desses erros depende : (i) da concepção do modelo teórico, (ii) da concepção do método de medição e (iii) da execução de todos os passos experimentais do processo.

Apresenta-se, nesse capítulo, uma análise detalhada de todos os erros inerentes aos dois métodos de medição de propriedades termofísicas propostos e apresentados nos capítulos III e IV.

5.2.2 - Análise da incerteza na determinação de K e α

Os erros comuns aos dois métodos são: os erros na restrição do modelo, como fluxo de calor unidimensional; erros na medição de temperatura e fluxo de calor devidos à calibração, tempo de resposta e contato térmico entre os sensores, e incerteza de medição na aquisição de sinais. Acrescenta-se ainda os erros numéricos a partir dos cálculos das transformadas rápidas de Fourier, usadas para a obtenção dos dados no domínio da frequência (erros de aliasing), e ao método de processamento de sinais.

O procedimento usado para a estimação da incerteza na determinação das propriedades se dá através do cálculo da propagação das incertezas na medição das variáveis originais (fluxo de calor e temperatura) e cálculo das transformadas de Fourier numéricas para obter a função resposta em frequência. Usa-se aqui a hipótese de propagação linear, uma vez que se obtém a função resposta em frequência, $Z(f)$ como linearmente dependente dos sinais de fluxo e temperatura no domínio da frequência. Analisa-se os erros sistemáticos devido ao contato térmico entre os sensores e a amostra, e a hipótese de fluxo de calor unidimensional do ponto de vista qualitativo (veja parágrafo 5.2.1) através de simulação numérica. Os resultados da simulação numérica asseguram o uso das hipóteses de contato térmico perfeito e fluxo unidirecional, dentro das condições experimentais usadas nesse trabalho, i.e., materiais não metálicos, dimensões da amostra (30 X 30 X 05 cm³) e duração de aquecimento (inferior a 120 segundos). Assim estima-se a incerteza do sistema de medição das variáveis originais como a soma das incertezas parciais do sistema de aquisição e da calibração dos sensores de temperatura e fluxo de calor. A incerteza final na obtenção de $Z(f)$, e consequentemente na obtenção das propriedades, é dada pela composição das incertezas do sistema de medição das variáveis originais com a incerteza na determinação numérica de $Z(f)$, via estimação da densidade espectral. Da teoria de propagação linear de erros [41], a incerteza do sistema de medição pode ser obtida através da incerteza de medição do sistema de aquisição de dados e da incerteza do sensor usado na obtenção do sinal, como

$$I_{\text{sis med}}^2 = I_{\text{sis aquis}}^2 + I_{\text{sens}}^2 \quad (5.1)$$

Assim, pode-se obter a incerteza da impedância através da análise de propagação da incerteza do sistema de medição e do erro numérico oriundo

das aplicações das transformadas rápidas de Fourier para o cálculo das densidades espectrais:

$$I_{Z(f)}^2 = I_{\text{sis med}}^2 + I_{\text{num}}^2$$

ou seja,

$$I_{Z(f)}^2 = I_{\text{sis med trans}}^2 + I_{\text{sis med terp}}^2 + I_{\text{num}}^2 \quad (5.2)$$

Apresenta-se a seguir a obtenção individual de cada incerteza.

5.2.3 - Análise das hipóteses de fluxo de calor unidimensional e contato térmico perfeito entre os sensores e a amostra através de simulação numérica

As perdas de calor laterais e a resistência de contato entre os sensores e a amostra são ocorrências físicas reais e inevitáveis. Todavia os seus efeitos podem não ser importantes dependendo das condições experimentais. Este parágrafo apresenta uma simulação numérica da bancada experimental, incluindo as perdas de calor laterais por convecção, a influência dos transdutores e da lâmina de borracha de silicone usada para um melhor contato térmico. Busca-se assim, considerando-se os métodos transiente propostos, respostas a questões como: para que materiais, e duração de aquecimento, pode-se desprezar os efeitos das perdas de calor laterais; e em que condições os efeitos da resistência de contato térmico são nulos. Para isso, propõe-se a solução do seguinte problema de condução de calor, mostrado na Figura 5.2, descrito pela equação da difusão,

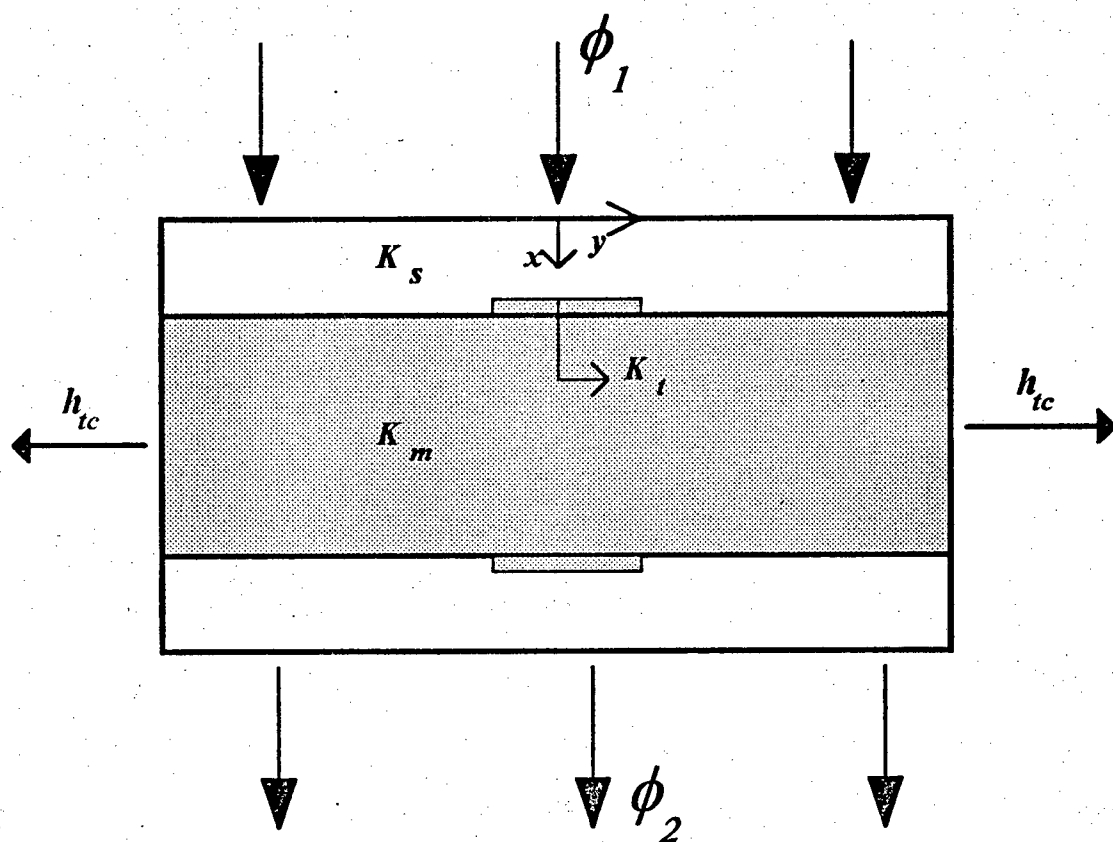


Figura 5.2 - Modelo do aparato experimental

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.3)$$

sujeito às condições de contorno

$$-K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi_1(t) \quad (5.4)$$

$$- K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \phi_2(t) \quad (5.5)$$

$$- K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ (simetria)} \quad (5.6)$$

$$- K \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=B/2} = h_{tc} \left(T(B/2, t) - T_{\infty} \right) \quad (5.7)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (5.8)$$

A Figura 5.3 mostra as condições experimentais. A resistência de contato é simulada como uma camada de ar entre o transdutor e a amostra. Observa-se que além da camada de ar na região de contato, uma região, δ_b , simula o efeito dos cantos dos transdutores.

As propriedades térmicas dos diversos materiais presentes no experimento são obtidas da literatura [42-43]. Os transdutores de fluxo de calor e termopares de superfície foram simulados como uma placa fina de alumínio com a espessura do transdutor. Nesse sentido, todas as espessuras são reais, exceto a da camada de ar. Nesse caso, usou-se um interstício de 10 μm . Observa-se que o valor de 10 μm é encontrado na literatura porém com modelos para região de contato, que variam segundo a forma e a frequência de contato entre as superfícies.

Obtém-se assim a solução das equações (5.3-5.8) com os diversos

valores de α e K para os diferentes materiais e suas espessuras, apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2.

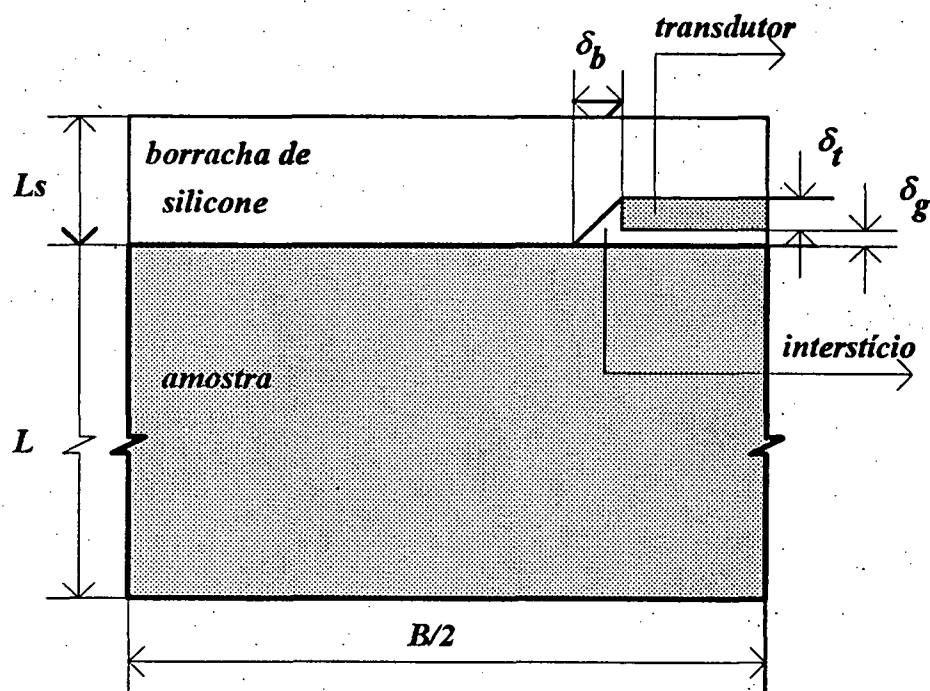


Figura 5.3 - Modelo para a resistência de contato

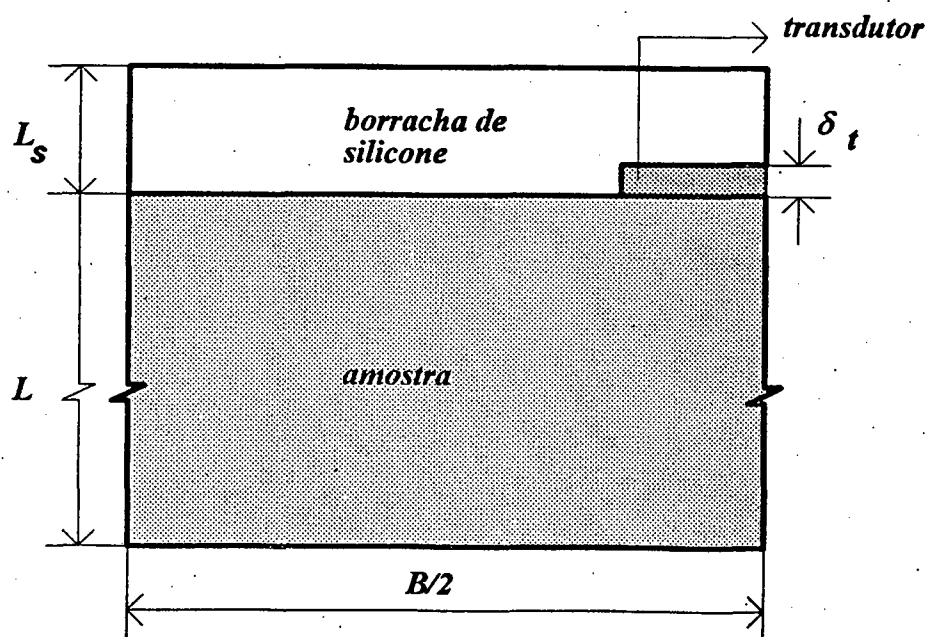


Figura 5.4 - Resistência de contato: modelo sem interstício

Tabela 5.1 - Dimensões e propriedades térmicas para os diferentes materiais da bancada experimental

	silicone	alumínio (trans)	Polythene	ar
L [mm]	3	0,3	50	0,01
K [W/mK]	0,03	237	0,40	0,03
$\alpha \times 10^7$ [m ² /s]	970	971	1170	230

Tabela 5.2 - Propriedades térmicas para amostras de diferentes materiais

	madeira	concreto	aço	alumínio	cobre
K [W/mK]	0,1	0,9	15,1	237	401
$\alpha \times 10^7$ [m ² /s]	0,8	4,3	39,1	971	1170

O efeito da resistência de contato é analisado comparando-se as temperaturas nas superfícies da amostra e do transdutor. A região usada para essa comparação situa-se, na amostra, numa área quadrada adjacente, ao transdutor, ou seja, nas posições entre $0 < x < L$ e $0 < y < B/2$, sendo L a espessura do transdutor. Esse procedimento simula então as condições reais de uma medição de temperatura, uma vez que o termopar mede hipoteticamente a temperatura de equilíbrio entre ele e a superfície. Uma vez que não há gradiente de temperatura nas superfícies da amostra e do transdutor, na região de comparação, especificada acima, os resultados serão apresentados para a posição $(x,y) = (0,0)$, ou seja no centro do transdutor e da amostra.

Analisou-se os efeitos dos cantos do transdutor variando-se a espessura δ_b . Uma vez que a malha é ortogonal, o canto foi simulado, como um retângulo dessa espessura. Salienta-se que o interesse aqui é o da análise da relevância dos efeitos da resistência de contato no método de medição, e não o de quantificá-la. Desse modo, a concepção de um modelo com um interstício horizontal ao longo de toda a extensão do transdutor (espessura de 10 μm) para a simulação da região de contato térmico imperfeito entre o transdutor e a amostra superestima os efeitos da resistência de contato entre os materiais. O desenvolvimento de modelos para a região de contato, considerando-se as características de cada material, como rugosidade, acabamento superficial, pressão de contato, transferência de calor por radiação e convecção, entre outros, são objetos de intensa pesquisa e não são abordados nesse trabalho. Nesse sentido os resultados aqui apresentados são representativos quanto à pouca influência da resistência de contato quando se trata de materiais não condutores. Todavia, os efeitos relativos aos materiais metálicos por serem superestimados devem, portanto, ser analisados dentro desse prisma. Nesse caso, como existe grande influência da resistência de contato térmico nesses materiais, um modelo mais específico deve ser elaborado.

A simulação das perdas de calor laterais devido à convecção se dá através da variação do valor do coeficiente de convecção, h_{tc} , entre os valores extremos de 0 (isolamento perfeito nas laterais: solução unidimensional) e ∞ (perda de calor máxima: temperatura da superfície igual a do meio). O valor médio de $h_{tc} = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ é obtido de Incropera & De Witt, [43], para as condições do experimento. O modelo numérico usado

baseia-se no programa de volumes finitos desenvolvido por Patankar [44] com inúmeras aplicações [45]. O método de solução do sistema linear de equações utiliza o TDMA, Tri-Diagonal Matrix Algorithm, [44], sendo usado uma malha ortogonal não uniforme, refinada na região do transdutor. O passo na direção x , na região das superfícies do transdutor e amostra possui o mesmo valor da mesma espessura do interstício, ou seja $10\ \mu\text{m}$. Nesse caso, o interstício é considerado na simulação como um elemento, discretizado apenas na direção y . O intervalo de tempo entre as iterações é de 1 segundo. A solução analítica obtida no método de estimação de parâmetros no domínio do tempo para o modelo unidimensional, Cap. III, é usada para a validação da solução numérica. Nesse caso, usou-se a solução obtida para $h_{tc} = 0$, com o mesmo fluxo de calor submetido na amostra.

A Figura 5.5 apresenta as soluções numérica e analítica, em $(x,y) = (0,0)$, uma vez que os transdutores de fluxo de calor e termopares são centralizados nas superfícies frontal e oposta da amostra. Além disso, como dito anteriormente, não há gradientes de temperatura numa área centralizada e que circunscreve o transdutor ($5 \times 5\ \text{cm}^2$), seja na superfície do transdutor ou da amostra (isso pode ser observado nas Figuras 5.6 e 5.10, apresentadas a seguir).

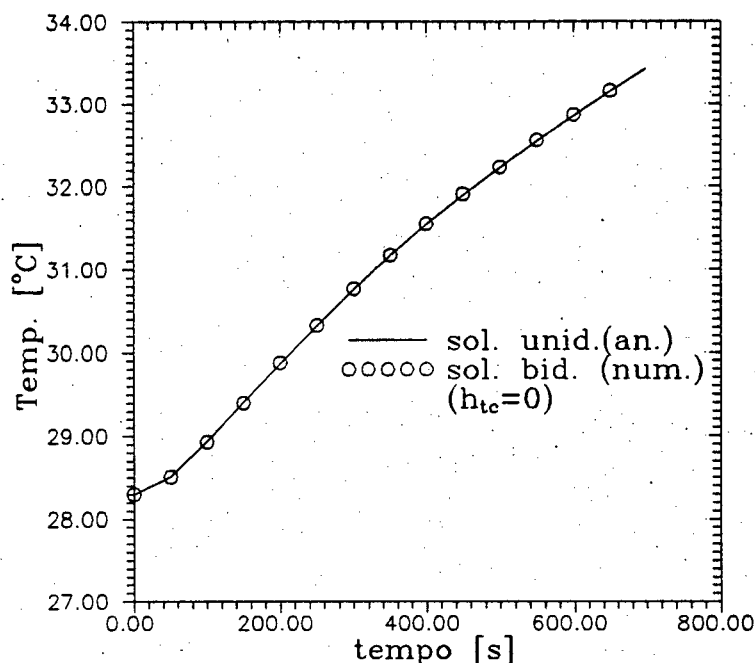


Figura 5.5 - Comparação entre soluções numérica e analítica para a validação do modelo numérico no centro da amostra, $T(x,y)=T(0,0)$.

Observa-se ainda que, na simulação, apenas a superfície de aquecimento é analisada, já que a superfície oposta apresenta um comportamento análogo. O desvio máximo encontrado entre as soluções foi de $0,05\text{ }^{\circ}\text{C}$.

A observação dos resultados nos permite analisar os erros sistemáticos devido à unidirecionalidade do fluxo de calor. Observa-se na Figura 5.6 que os efeitos de perda de calor laterais, para materiais como o polythene, só começam a aparecer a partir da proximidade das extremidades, ou seja a partir de $y^* = 0,70$, onde y^* é uma variável medida a partir do centro da amostra, e definida como $y^* = y/L_b$, sendo L_b igual a $B/2$.

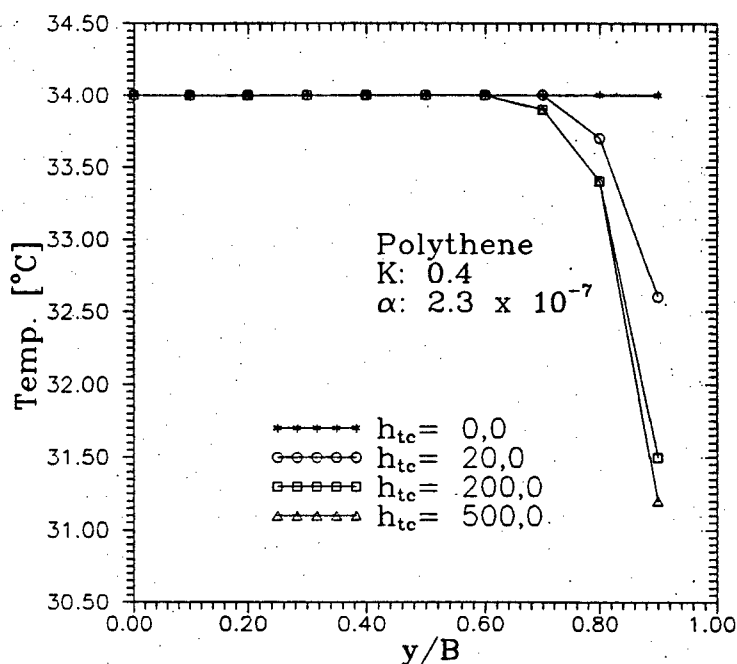


Figura 5.6 - Perfil da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, para a amostra de Polythene para $t = 800$ s

As Figuras 5.7-5.11 apresentam resultados para outros tipos de materiais. Observa-se que para materiais como a madeira o valor de y^* é ainda superior, ficando em torno de 0.85. À medida que os materiais vão se tornando mais condutores, este valor começa a diminuir, como é o caso do concreto, onde $y^* = 0.7$. Para materiais metálicos o problema começa a se agravar devido à necessidade de se aumentar a intensidade dos fluxos de calor impostos na superfície. Nesse caso, as perdas de calor laterais passam a interferir nos perfis de temperatura de modo que não se recupera o perfil de temperatura unidimensional no centro das amostras, como mostram as Figuras 5.9-5.11.

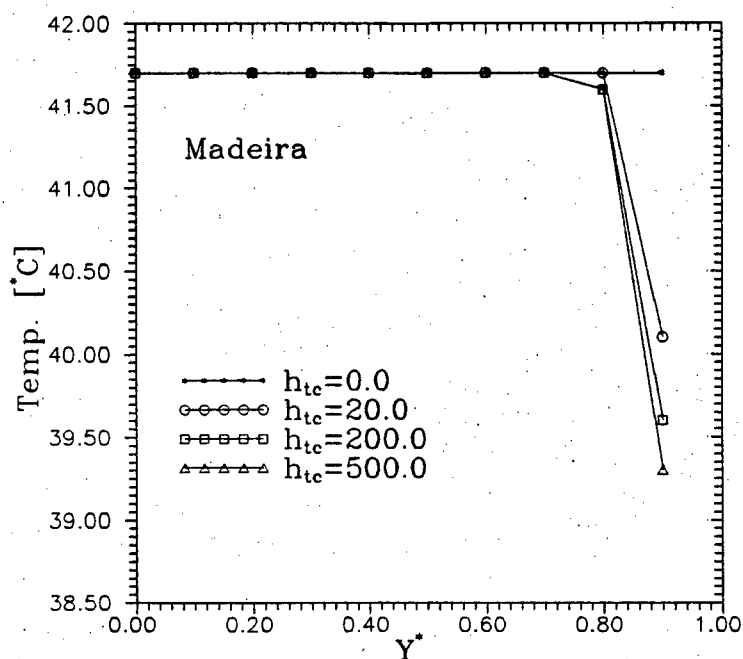


Figura 5.7 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção para amostra de madeira, para $t = 800$ s

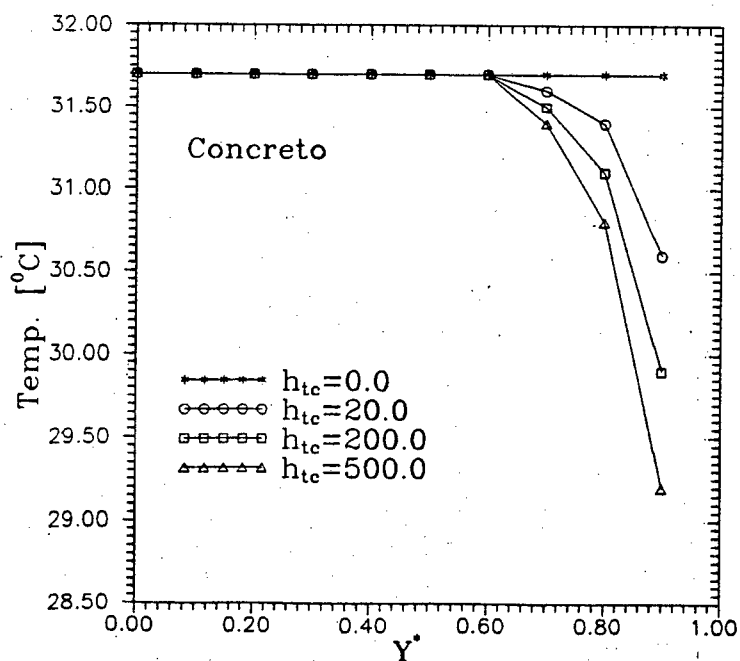


Figura 5.8 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de concreto para $t = 800$ s.

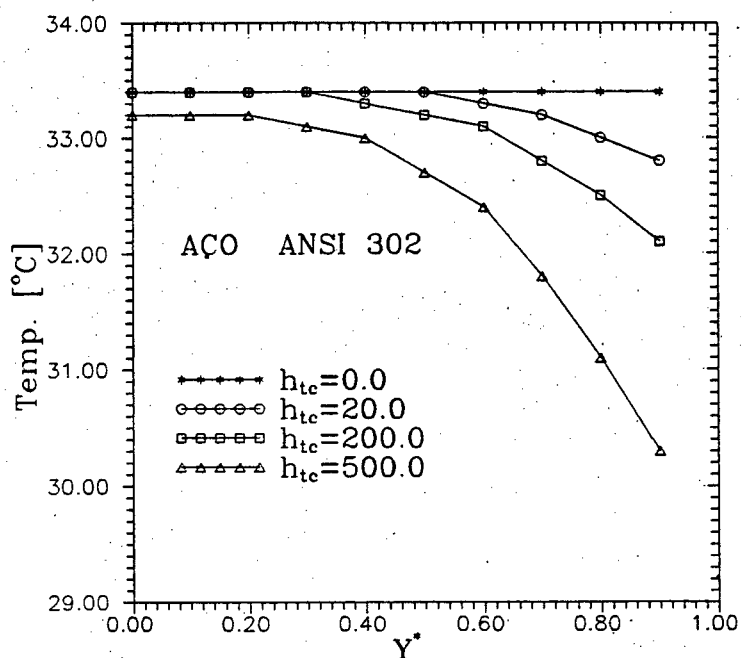


Figura 5.9 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de aço

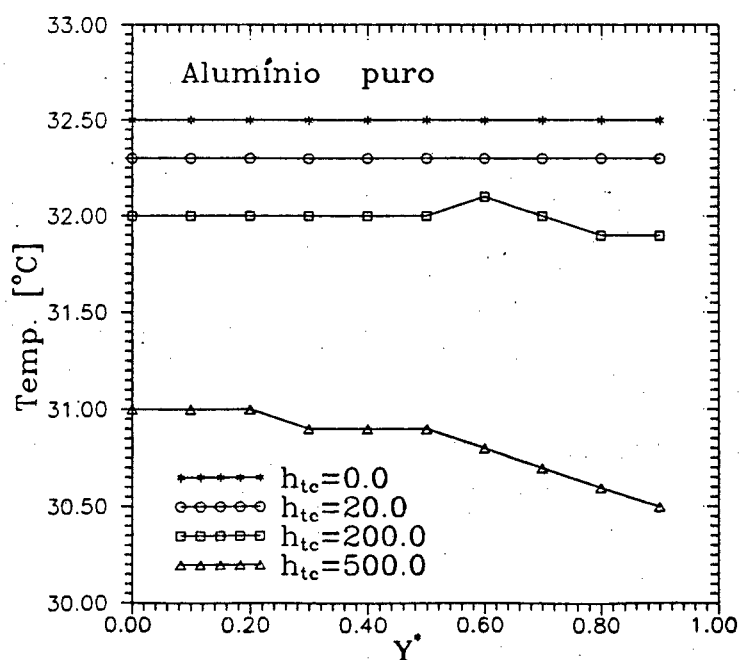


Figura 5.10 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de alumínio

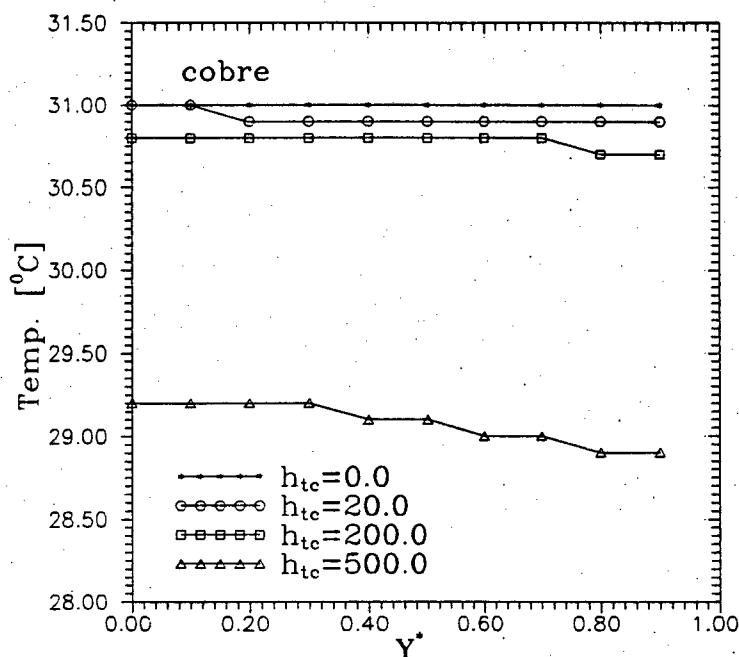


Figura 5.11 - Evolução da temperatura ao longo da superfície de aquecimento para diversos valores de coeficiente de convecção, amostra de cobre

Para o polythene, as perdas de calor laterais começam a interferir somente a partir de instantes muito longos, superiores a 8000 s, como mostra a Figura 5.12, considerando-se ainda, nesse caso, gradientes superiores a 25 °C. Observa-se na Figura 5.13 que para materiais metálicos, como o cobre, esse tempo é bem menor, ocorrendo o começo do desvio entre os perfis de temperatura, relativos à solução unidimensional e bidimensional, com $h_{tc}=20 \text{ W/m}^2\text{h}$, a partir de 2000 s.

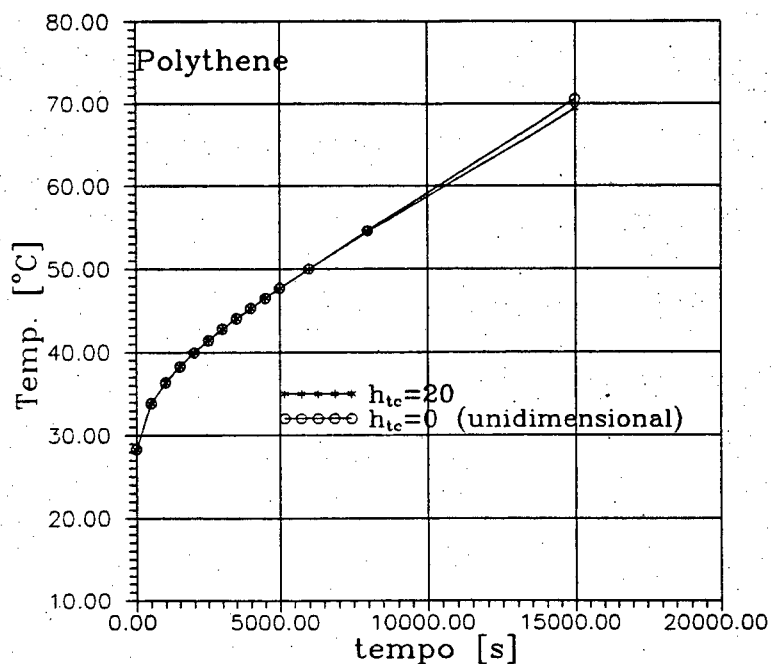


Figura 5.12 - Evolução da temperatura no centro da superfície de aquecimento. Amostra de polythene, $h_{tc} = 20$. Comparação com a solução unidimensional.

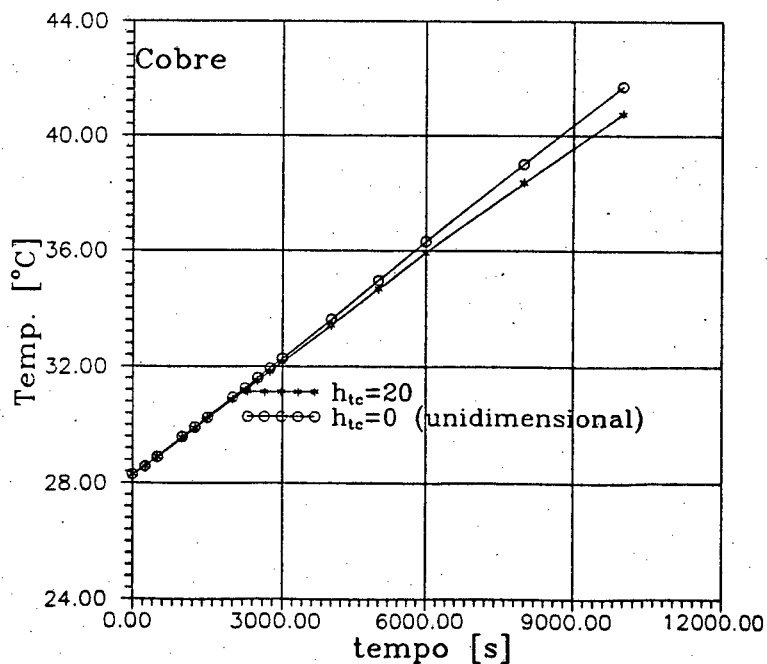


Figura 5.13 - Evolução transiente da temperatura no centro da superfície de aquecimento, para amostra de cobre, $h_{tc}=20$. Comparação com a solução unidimensional.

As Figuras 5.14-5.18 mostram os resultados do estudo da influência do contato térmico entre o transdutor de fluxo de calor e a amostra. Observa-se que a hipótese de bom contato térmico entre o transdutor e a amostra é confirmada para amostras não metálicas. A comparação entre as simulações para as temperaturas dos modelos considerando materiais não metálicos (Figuras (5.14-5.16)) apresenta um desvio inferior a 0,1 %. O mesmo não ocorre para os materiais metálicos. As Figuras (5.17-5.18) mostram comparações do efeito da resistência de contato para o aço e o cobre, considerando-se, sempre, a espessura do interstício de 10 μm entre o transdutor e a amostra.

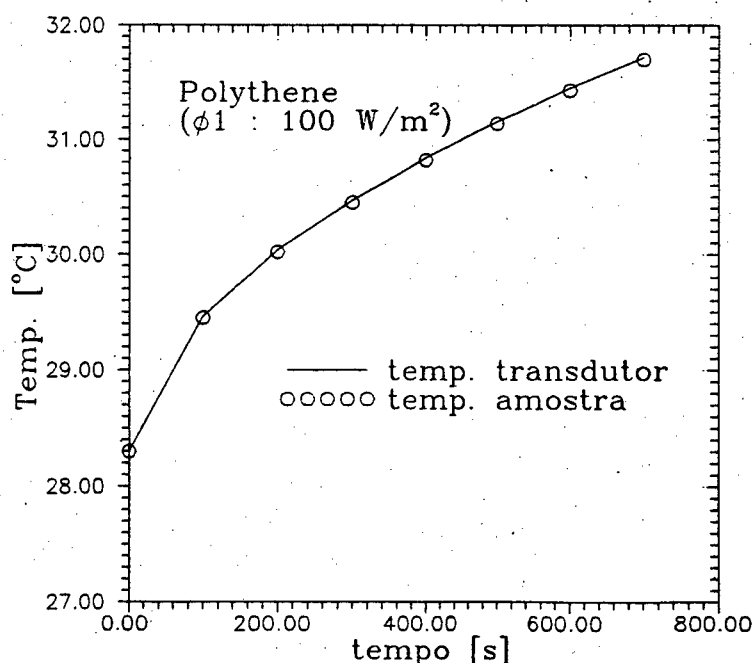


Figura 5.14 - Análise da influência da resistência de contato, 10 μm de interstício. Amostra de polythene

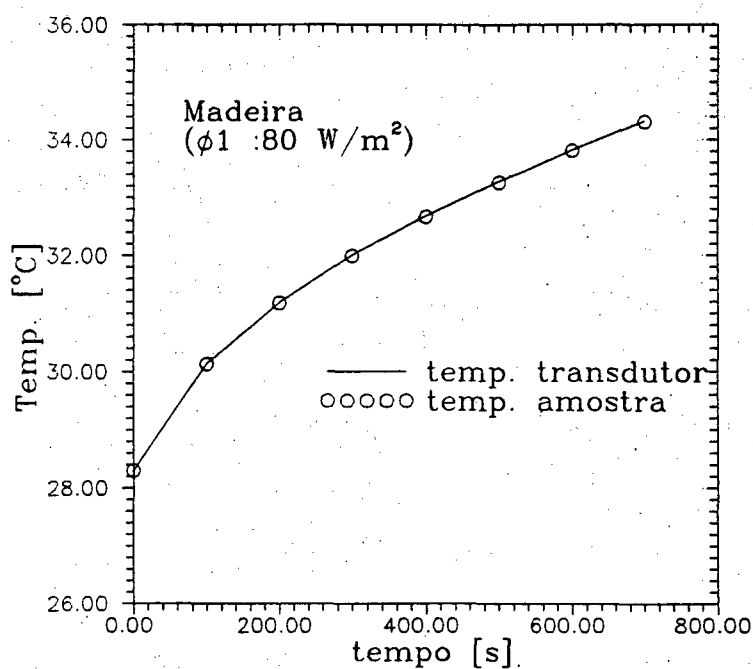


Figura 5.15 - Análise da influência da resistência de contato, $10 \mu\text{m}$ de interstício. Amostra de madeira

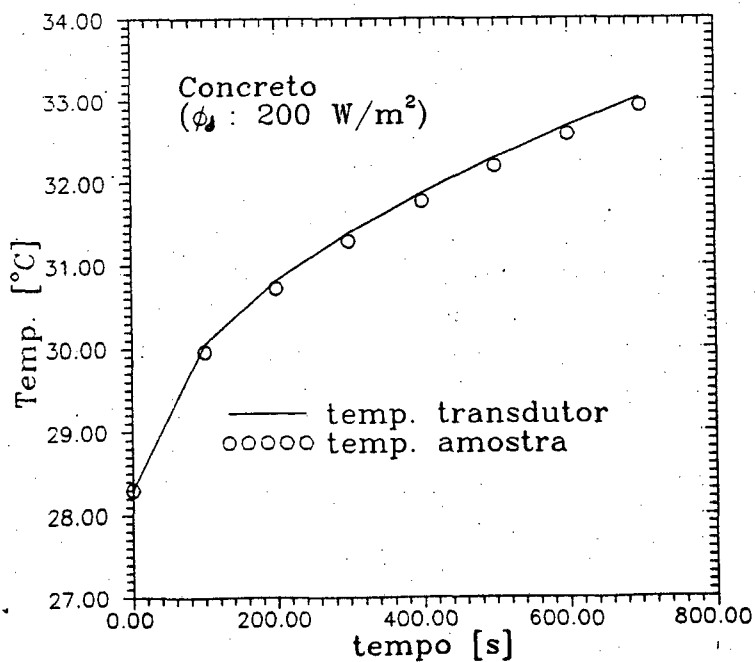


Figura 5.16 - Análise da influência da resistência de contato, $10 \mu\text{m}$ de interstício. Amostra de concreto

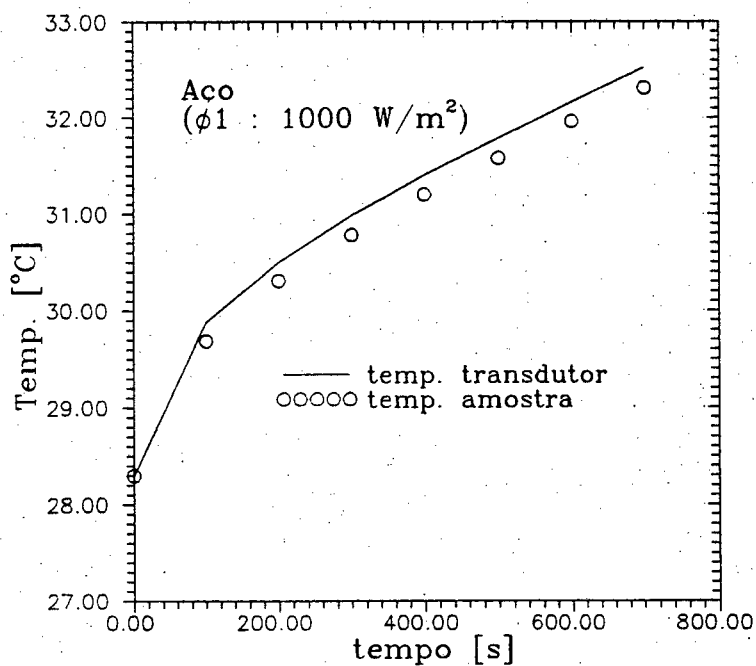


Figura 5.17 - Análise da influência da resistência de contato, $10 \mu\text{m}$ de interstício. Amostra de aço ANSI 302

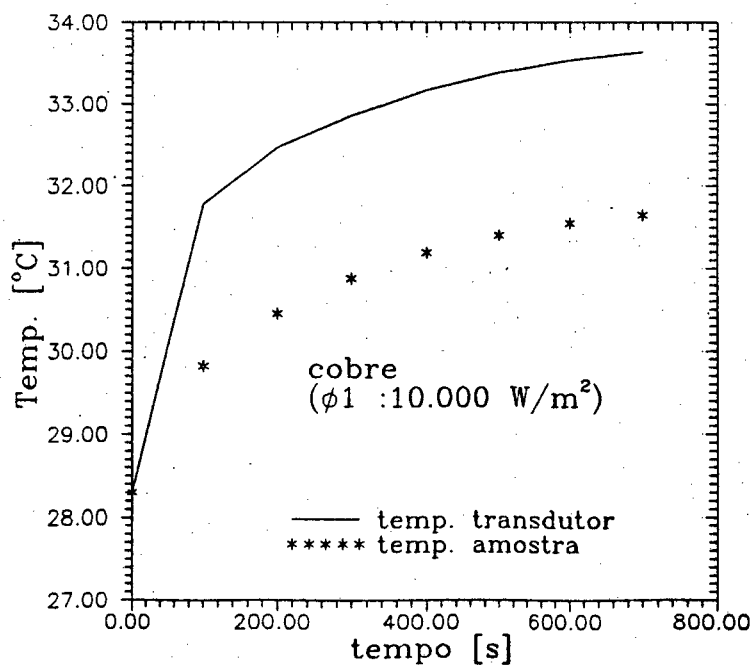


Figura 5.18 - Análise da influência da resistência de contato, $10 \mu\text{m}$ de interstício. Amostra de cobre puro

Os efeitos dos cantos podem também ser analisados para o polythene comparando-se as temperaturas no centro da amostra, no modelo bidimensional sem resistência de contato (Figura 5.4) e as temperaturas correspondentes aos diversos valores de δb para o modelo com resistência de contato, (Figura 5.3). Os desvios entre as temperaturas foram inferiores $0,02^{\circ}\text{C}$ para valores de δb iguais a até $1/4$ da largura do transdutores.

5.2.4 - Incerteza no sistema de medição (sistema de aquisição e sensores)

Pode-se analisar os erros de medição a partir da observação da Figura 5.19 que mostra os passos de medição indireta de uma variável física como temperatura ou fluxo de calor.

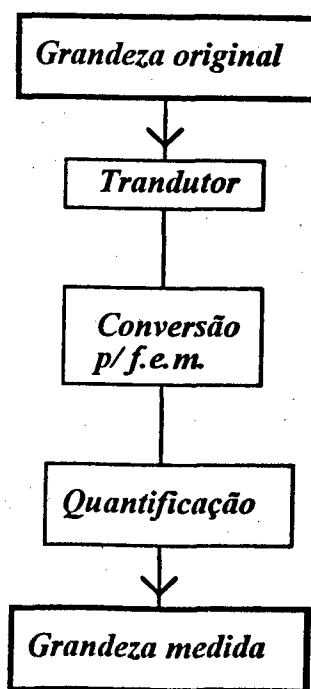


Figura 5.19 - Medição indireta de uma variável física [41]

Nesse caso a variável física mensurável é convertida numa variável auxiliar como uma grandeza elétrica (e.g., força eletromotriz, f.e.m.). A f.e.m. é então quantificada através de várias técnicas possíveis.

O sistema de aquisição de dados usado é o HP 3852A Data Acquisition/Control Unit que possui a maioria de elementos que aparecem na cadeia de medição, descritos na Figura 5.20, a seguir,

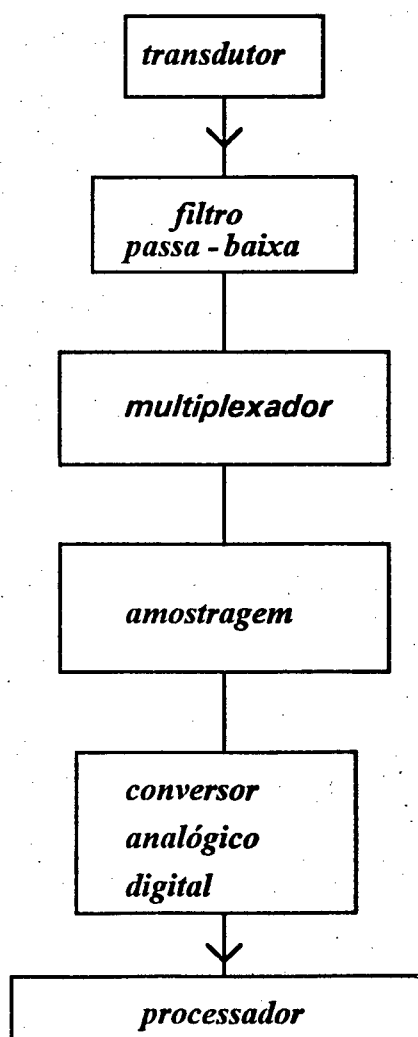


Figura 5.20 - Sistema de aquisição usado (baixo ruído)

onde transdutor é o elemento que converte o sinal de uma forma em outra. Para a temperatura usa-se como transdutor termopares de superfície enquanto

para o fluxo de calor usa-se transdutores de fluxo de calor cujo princípio de medição baseia-se em termopilhas superficiais (termopares conectados em série) [33]; o filtro passa baixa é usado para limitar a frequência do sinal de entrada antes de ser amostrado, evitando-se assim sinais espúrios de frequências maiores que a desejada. O multiplexador tem a função de selecionar os canais do equipamento para a conexão dos diferentes sensores; o amplificador é usado para maximizar a resolução da medição; a amostragem é o processo de quantificação, realizado imediatamente antes do conversor analógico digital, CAD. Este processo se dá em um tempo finito e tem a função de capturar e manter o sinal analógico, prevenindo-se que este não sofra mudança durante o processo de conversão; e o CAD tem a função principal é converter o sinal analógico numa representação digital, como sugere seu nome.

Excetuando-se a incerteza relativa aos sensores, todos os outros elementos integrantes da cadeia de medição dada pelo voltímetro, cabos e módulos funcionais operando na faixa de temperatura entre 18 - 28 °C e auto-zero na posição "on" com NPLC = 1, faixa de 30 mV e com aquecimento prévio de uma hora (warm up) tem uma incerteza estimada em

$$I_{\text{sis aquis}} = 0.02 \% + 6 \mu\text{V} \quad (5.10)$$

Observa-se que, em todos os experimentos, a temperatura ambiente foi controlada, sendo sua faixa de variação de 22 °C a 26°C e o voltímetro usado dentro das especificações de aquecimento.

As incertezas dos sensores de fluxo de calor e temperatura, foram estimadas a partir da calibração realizada no Laboratório de Meios Porosos e Propriedades Termofísicas de Materiais do Departamento de Engenharia

Mecânica da UFSC, [40]. As incertezas obtidas na calibração desses sensores são especificadas

$$I_{trans} = 1,45 \% \text{ da leitura para os transdutores} \quad (5.11)$$

$$I_{terp} = 0,74 \% \text{ da leitura para os termopares} \quad (5.12)$$

Salienta-se que todas as estimativas de incertezas parciais, ou seja, dos termopares, transdutores, sistema de aquisição de sinais e erros numéricos (apresentados a seguir) foram avaliadas com o fator de student $\sigma = 2$ para 95,7 % de confiança. O fator de student foi aplicado ao valor da soma dos erros aleatórios e sistemáticos encontrados, ao invés da multiplicação somente no erro aleatório. Esse procedimento se deve a dificuldade da separação em alguns casos dos erros sistemáticos e aleatórios. Nesse caso, a incerteza resultante tem o seu valor superestimado. Assim, substituindo as Eqs. (5.10)-(5.12) na equação (5.1) obtém-se as incertezas parciais para as medições de fluxo de calor e temperatura. Considera-se ainda, nesse caso que são usados dois transdutores de fluxo de calor e dois termopares de superfície para as medições. Assim,

$$I_{sis \text{ med } trans} = 2.0 \% \quad (5.13)$$

$$I_{sis \text{ med } terp} = 1.0 \% \quad (5.14)$$

5.2.5 - Erros numéricos no uso da transformada rápida de Fourier

Finalmente, o erro apresentado na estimação da resposta em frequência via densidade espectral através do uso da transformada rápida de Fourier é estimado por Bendat and Pierson [46] como,

$$I_{\text{num}} = \left[\gamma - 1.0 \right]^2 / \left(|\gamma| \sqrt{n_d \cdot 2.0} \right) \quad (5.15)$$

onde γ é o coeficiente de coerência dado por

$$\gamma = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \cdot S_{yy}} \quad (5.16)$$

e n_d o número de experimentos usados para obtenção das densidades espectrais médias.

Observa-se que as expressões para a avaliação dos erros para resposta em frequência são aplicadas a processos aleatórios estacionários, definidos a seguir.

Considere uma coleção de dados amostrados (conjuntos de experimentos) descritos pelo valor de uma função em cada instante. O valor médio (primeiro momento estatístico) do processo aleatório a um instante t_1 pode ser computado tomando-se o seu valor instantâneo de cada conjunto ao tempo t_1 , somando seus valores e dividindo pelo número de funções amostradas. Da mesma forma, a correlação entre os valores de um processo aleatório em dois instantes diferentes pode ser computada. Para isso, toma-se o valor médio do produto das funções amostradas para os seus valores instantâneos nos instantes t_1 e $t+\tau$. Assim, define-se a média e a função auto correlação, respectivamente, como

$$\mu_x(t_1) = (1/N) \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (5.17)$$

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = (1/N) \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) \quad (5.18)$$

onde o sub-índice k representa o número de funções amostradas, x a função amostrada e N o número total de conjuntos. Um processo é dito estacionário quando $\mu_x(t_1)$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ não variam com t_1 . Ou seja, $\mu_x(t_1) = \mu_x$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau)$.

A estimativa do erro estatístico para o cálculo da resposta em frequência, como foi dito anteriormente, é restrita aos processos estacionários. Todavia, na prática, é possível a representação de dados transientes por dados estacionários [46]. Alcança-se esse objetivo através da repetição de experimentos sob condições fixas, de modo a obter-se a estacionaridade desejada. Nesse caso, a partir do controle de condições externas como temperatura ambiente, temperatura inicial e ainda duração e intensidade do aquecimento, tempo de amostragem e tempo total de aquisição, pode-se então gerar dados estacionários que representam o fenômeno transiente desejado.

A partir dessa hipótese e aplicando-se a Eq. (5.15) e (5.16) nos conjuntos de experimentos, obteve-se, na faixa de frequência de interesse, o erro máximo de 0,5 % (veja Figura 5.21).

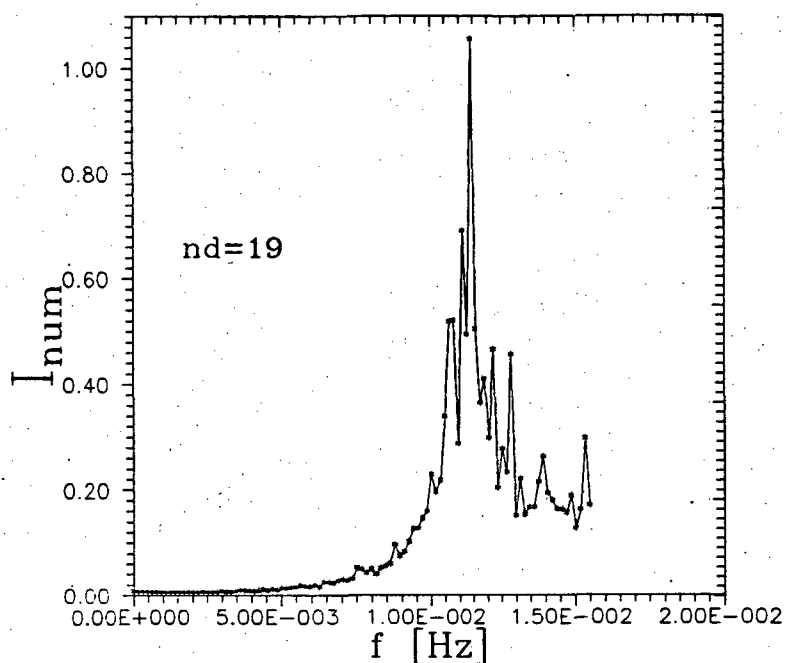


Figura 5.21 - Incerteza estatística na estimação de resposta em frequência, $Z(f)$

Portanto, se

$$I_{\text{num}} = 0,5 \% \quad (5.19)$$

obtem-se a incerteza na determinação da resposta em frequência, $Z(f)$, substituindo as Eqs. (5.13), (5.14) e (5.19) na Eq.(5.2), ou seja,

$$I_{Z(f)} = \pm 2,36 \% \quad (5.20)$$

Segundo Bendat and Pierson [46] a incerteza na estimativa de $Z(f)$, $I_{Z(f)}$ é igual à incerteza do módulo e da fase, ou seja

$$I_{Z(f)} = I_{|Z(f)|} = I_{\Psi} \quad (5.21)$$

Assim, da hipótese de propagação linear de erros, a incerteza na estimação da difusividade térmica é

$$I_{\alpha} = I_{\Psi} = 2,36\% \quad (5.22)$$

e a incerteza na estimação da condutividade térmica pode ser estimada da propagação da incerteza do módulo de $Z(f)$, $I_{Z(f)}$ e da estimativa de α , I_{α} , ou seja

$$I_K^2 = I_{\alpha}^2 + I_{|Z(f)|}^2 \quad (5.23)$$

Portanto, substituindo as Eqs (5.21-5.22) na Eq. (5.23) obtém-se

$$I_K = 3,34\%$$

CAPÍTULO VI

Análise de Resultados: Métodos da Estimação de Parâmetros no Domínio do Tempo e da Frequência

6.1 - Introdução

O desenvolvimento dos dois métodos transientes descritos nos Caps. 3 e 4 apoiados sobre o mesmo objetivo (medição de K e α simultânea) deveria, *a priori*, apresentar "idênticos" resultados, uma vez que se investigou uma mesma amostra - amostra de polythene de 50 mm de espessura e área de 30x30 cm². Todavia, a impossibilidade do uso do método da estimação dos parâmetros no domínio do tempo (Método I) frustrou-nos essa expectativa, tornando-se difícil uma comparação direta entre os métodos. Entretanto, o modelo teórico desenvolvido no método I e seus dados experimentais podem ser utilizados a partir das propriedades estimadas pelo método II.

6.2 - Análise de resultados

Como apresentado no Cap. IV, a amostra de polythene de espessura 50 mm de espessura e área 30x30 cm² tem valores da condutividade e difusividade térmica estimados em

$$K = 0.389 \text{ W/mK} \pm 3.1\%$$

e

$$\alpha = 2.33 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \pm 1.7\%$$

avaliados à uma temperatura média de 29.0°C. Observa-se que a incerteza de 3.1% no valor obtido de K é levemente inferior à incerteza teórica prevista

(3.34%), o mesmo ocorrendo com o valor estimado da difusividade térmica - incerteza de 1.37% - que é menor do que o valor previsto (2.36%).

Salienta-se, ainda, que adicionalmente às fontes de erros previstas no Capítulo V, há o erro relativo à variação de 4°C em torno da temperatura média de 29.0°C . A partir dessa variação, obtém-se uma incerteza em torno de 0.9% no valor de K para o valor da condutividade térmica (avaliando-se a partir da expressão de K em função da temperatura, fornecida pelo NPL [36] - método em regime permanente). Entretanto, a avaliação desse efeito na medição de K e α só pode ser feita a partir da obtenção das propriedades em várias temperaturas (proposta de trabalhos futuros - Cap 7). Todavia, as incertezas obtidas para K e α , menores que as previstas teoricamente, indicam a aplicabilidade do gradiente de 4°C imposto na amostra.

Os resultados finais relativos às propriedades térmicas estimadas podem também ser comparados no domínio do tempo. Assim, ao invés de se apresentar essa comparação através da história temporal da impedância em suas formas teórica e experimental, optou-se por fazê-la através da comparação entre as temperaturas transientes, analítica e experimental, ambas obtidas pelo método da estimação de parâmetros. Nesse caso, a comparação tornar-se-ia mais geral não se restringindo ao próprio método. A Figura 6.1 apresenta essa comparação.

Observa-se que a solução analítica obtida a partir do modelo matemático e dos valores estimados para as propriedades térmicas tem ótima concordância com as temperaturas experimentais nas superfícies da amostra

Acrescenta-se que a independência desse resultado não só assegura a adequacidade dos modelos propostos como aparentemente, valida o

procedimento de estimação de propriedades proposto.

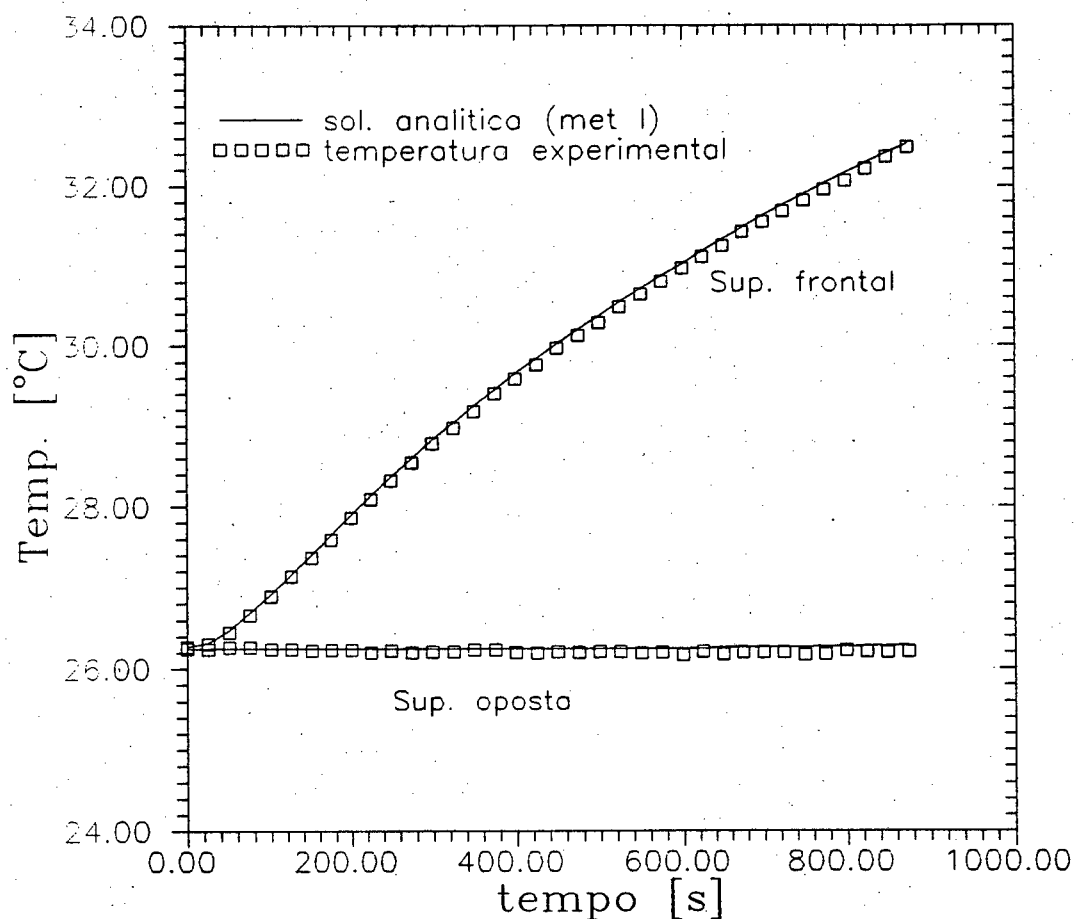


Figura 6.1 - Comparação das soluções analítica e experimental do método de estimação de parâmetros, a partir das propriedades estimadas pelo método do domínio da frequência, na posição $(x,y)=(0,0)$

Concluindo essa análise, uma consideração relativa às condições de contorno (evolução de fluxo de calor e temperatura) na superfície oposta deve ser feita. Se no método I o fluxo de calor resultante, considerado nulo, e a temperatura considerada constante da face oposta não puderam intervir na estimação dos parâmetros, no segundo método, a pequena

sensibilidade dos parâmetros às evoluções de temperatura e fluxo de calor na face oposta da amostra é uma indicação da aplicabilidade do método da estimação de parâmetros no domínio da frequência em materiais *in situ*. Assim, se possibilita a obtenção da condutividade e difusividade térmica, a partir, somente, das evoluções transientes do fluxo de calor e da temperatura na superfície frontal do meio, uma característica importante, por exemplo, quando se deseja investigar uma parede cujo acesso físico se dá somente em uma superfície. Esta é seguramente uma aplicação potencial desse método a ser explorada.

CAPÍTULO VII

Conclusão

O primeiro método de estimação de propriedades térmicas proposto nesse trabalho qual seja a estimação de parâmetros no domínio do tempo, não alcançou seu principal objetivo. A determinação simultânea da condutividade e difusividade térmica não se realizou devido a existência de uma região de dependência linear entre elas. Observa-se que a independência linear entre as propriedades é essencial para a estimação de seus valores de forma única e simultânea. As exigências para se evitar essa região de dependência como aumento do fluxo de calor imposto ou diminuição da espessura da amostra, não puderam, entretanto, ser aplicadas. Salienta-se que por tratar-se de uma amostra padrão certificada essa não pode ser retificada. Além disso, possui limites quanto à resistência ao calor não podendo ser submetida a altos gradientes de temperatura.

O método desenvolvido a partir do processamento de sinais aplicado a um sistema dinâmico, do tipo entrada e saída, mostrou-se eficiente e adequado a materiais não metálicos, especificamente quando aplicado ao polythene. O fato do ângulo de fase da função impedância generalizada depender somente da difusividade térmica permitiu a unicidade dos parâmetros estimados, ou seja, utilizou-se a técnica de estimação de parâmetros individualmente para cada propriedade. Assim, regiões de dependência linear (que podem gerar mais de um par de solução para a estimação dos parâmetros) foram evitadas. A comparação dos valores estimados das propriedades a partir dos valores experimentais do módulo e fase da impedância generalizada com uma dispersão inferior a 1% demonstra a

eficiência do método. Outra comparação, feita no domínio do tempo a partir do modelo teórico e das temperaturas experimentais obtidas pelo método da estimação de parâmetros no domínio do tempo mostra a adequacidade do método.

A geração do fluxo de calor por efeito Joule, através de uma folha de resistência mostrou-se adequada e suficiente para a obtenção dos fluxos de calor e temperaturas de entrada e saída no sistema. Esse é um dos aspectos interessantes do ponto de vista de se baratear o custo da bancada experimental. O método flash, por exemplo, usa laser como fonte de calor, aumentando significativamente os custos do experimento. O uso dos transdutores de fluxo de calor torna possível a implementação do método, pela rápida resposta e alta sensibilidade. Um ponto delicado no uso de transdutores é a prevenção de erros devido à sua calibração. No presente caso, realizou-se um procedimento cuidadoso de calibração, resultando em sensores calibrados com incerteza na faixa dos instrumentos de leitura de medição utilizados. A análise de erros realizada apresentou uma incerteza teórica de 2.36% para a obtenção da impedância e difusividade térmica e 3.34% para a condutividade térmica.

Uma característica desse método é que os parâmetros devem ser constantes ao longo de todos os experimentos, ou seja, não devem sofrer alterações em função de variações da temperatura ambiente, da duração e intensidade do pulso de calor e da temperatura inicial da amostra entre outros. Nesse caso, como a condutividade térmica do polythene varia com a temperatura [36], todos os experimentos deveriam ter uma mesma temperatura média. O gradiente de 4 °C (máximo) imposto às superfícies extremas da amostra e às diferentes condições iniciais de cada experimento, podem, assim, ser fatores que contribuem para um aumento na incerteza dos valores

estimados das propriedades. Todavia, a incerteza de 3.1% para o valor estimado de K situa-se muito próxima ao limite máximo de erro permitido (3%) para obtenção da condutividade térmica, segundo as normas da ASTM [6] (métodos em regime permanente).

Embora a aplicação do método tenha se restringido à amostra de polythene, *a priori*, não há restrições quanto ao tipo de material a ser usado. Nesse sentido, variações nos tipos de materiais devem ser acompanhados de mudanças quanto a intensidade e duração do pulso de calor. Assim o tempo de amostragem e número de pontos de aquisição devem também ser analisados. Observa-se a influência de fatores tais como contato térmico imperfeito e alteração do fluxo de calor unidimensional no caso de materiais metálicos, necessitam uma análise mais detalhada. Nesse sentido, a aplicação desse método em materiais bons condutores de calor passa antes por um estudo das suas características geométricas (área e espessura) e físicas (resposta a pulsos de calor). Essas condições são decisivas na definição dos parâmetros usados no processamento de sinais e a consequente estimação das propriedades no domínio da frequência.

Proposta de Trabalhos Futuros

Desenvolvimento do aparato experimental para a aplicação de banhos isotérmicos nas superfícies extremas da amostra. A estimação de parâmetros no domínio da frequência requer que o sinal de entrada retorne ao seu estado inicial. A aplicação de banhos isotérmicos nas superfícies deve contribuir para uma maior rapidez desse retorno, diminuindo o tempo total de aquisição dos sinais. Entretanto, uma dificuldade no uso desses banhos é a obtenção da temperatura de equilíbrio inicial, uma exigência do método. Nesse caso, não deve haver nenhum gradiente de temperatura entre os banhos.

Por sua vez, as lâminas de silicone, o aquecedor resistivo e a amostra devem estar em equilíbrio com estes.

. Melhor controle da temperatura ambiente, e/ou dos banhos para a possibilidade da investigação das propriedades em várias temperaturas.

. Desenvolvimento de um programa ou técnica de otimização dos parâmetros envolvidos no processamento de sinais. Parâmetros como intervalo de amostragem, duração do aquecimento e número de pontos de aquisição são definidos a partir de testes, onde se analisa a resposta do material investigado aos pulsos de calor impostos. A escolha de valores ótimos para esses parâmetros são essenciais ao sucesso do método.

. Desenvolvimento de *software* para a automatização do método, capacitando-o para a obtenção das propriedades através de operador não especializado.

. Análise das condições de estimação das propriedades desprezando-se os sinais de fluxo de calor e temperatura na superfície oposta ao aquecimento, ou seja, analisando-se somente os sinais relativos à superfície frontal da mostra. Adaptação e análise de erros dessas condições para a consequente aplicação *in situ*.

. O teste do método de estimação de parâmetros no domínio do tempo (método I) para outras condições de amostra. No caso, amostras não metálicas mais finas, amostras que possam ser submetidas a fluxos de calor maiores ou amostras mais condutoras. Uma simulação do método para essas condições mostrou-se satisfatória, o que estimula o seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Kamiuto, K. and Iwamoto, M., Inversion Method for Determining Effective Thermal Conductivities of Porous Materials, *Journal of Heat Transfer*, Vol 109, pp 831-834, 1984
- [2] - Vos, B. H., Measurements of Thermal Conductivity by a Non-Steady-State Method, *Appl.Sci.Res*, Vol 5, pp 425-438, 1955
- [3] - Lee, T. Y. R., and Taylor, R. E., Thermal Diffusivity of Dispersed materials, *Journal of Heat Transfer*, vol 100, pp 720-724, nov 1978
- [4] - Laurent, M., Comparative and Critical Study of Some Methods for Determining the Thermophysical Properties of Heat Conducting Solids, *International Chemical Engineering*, vol 23, pp 31-47, jan 1983
- [5] - Degiovanni, A., Diffusivité et Méthode Flash, *Revue Generale de Thermique*, n 185, pp 416 - 442, mai 1977
- [6] - ASTM C177 - Standard Test Method for Steady - State Thermal Transmission Properties by means of the Guarded Hot Plate, 47 pgs.1976
- [7] - Beck, J. V., *The Optimum Analytical Design of Transient Experiments for Simultaneous Determination of Thermal conductivity and Specific Heat*, Ph. D. Thesys, Michigan State University, 1964
- [8] - ASTM C351-73 - Standard Test Method for Mean Specific Heat of

Thermal Insulation, 7 pgs, 1973

- [9] - Audibert, S., *Determination des Caracteristiques Thermo cinétiques des Milieux Poreux. Analyse Theorique, Measures et Resultats*, These Docteur 3^o Cycle, L'Institute National Polytechnique de Grenoble, avril 1985

- [10] - Parker, W. J., Jenkins, R. J., Butler, C. P. and Abbott, G. L., Flash method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity, *Journal of Applied Physics*, vol 32, pp 1679-1684, set 1961

- [11] - Degiovanni, A., Une Nouvelle Technique D'Identification de la Diffusivité Thermique pour la Méthode Flash, *Revue Phys. Appl.*, vol 21, pp 229-237

- [12] - Andrieu, J., Laurent, M., Piaux, J. P. and Oshita, S., Mesure Automatique de la Diffusivité Thermique des Denrées Alimentaires par la Méthode Impulsionnelle, *IAA Cahier Scientifique et Technique*, pp 905-909, octobre 1988

- [13] - Macqueron, J. L., Sinicki, G., Durand, G. and Rinaldi, D., Mesure de la Diffusivité Thermique par la Méthode du Signal Bref, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t.265, pp 440-443, aout 1967

- [14] - James, H. M., Theory of Pulse Measurement of Thermal Diffusivity on Two-Layer Slabs, *High Temperatures - High Pressures*, vol 17, pp 481-496, 1985

- [15] - Jonza, J. M. and Porter, S., Comparison of Two Methods for

Flash Thermal Diffusivity on Drawn Low-Density Polyethylenes,
Rev. Sci. Instrum., vol 10, pp 1654-1659, oct 1984

[16] - Taylor, R., Heat-Pulse Thermal Diffusivity Measurements, *High Temperatures - High Pressures*, vol 11, pp 43-58, 1979

[17] - Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*,
 Oxford University Press, New York, 1959

[18] - Shoemaker, R. L., Limitations of the Pulse Diffusivity Method as
 Applied to Composites Materials, *High Temperatures - High Pressures*, vol 18, pp 645-654, 1986

[19] - Blackwell, J. H., A Transient-Flow Method for Determination of
 Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk, *Journal of Applied Physics*, vol 25, pp 137-144, feb 1954

[20] - Laurent, J. P., *Contribution a la Caractérisation Thermique des Milieux Poreux Granulaires*, These Docteur, l'Institut National Polytechnique de Grenoble, oct 1986

[21] - Fernandes, C. P., *Estudo dos Processos de Condensação e Migração de Umidade em Meios Porosos Consolidados. Análise Experimental de uma Argamassa de Cal e Cimento*, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, março 1990

[22] - Fernandez, M. and Banda, C., Heat Pulse Line-Source Method to Determine Thermal Conductivity of Consolidated Rocks, *Rev. Sci. Instrum.*, vol 11, pp 2832-2836, nov 1986

- [23] - Glatzmaier, G. C. and Ramirez, W. F., Simultaneous measurement of the Thermal Conductivity and Thermal Diffusivity of Unconsolidated Materials by the Transient Hot Wire Method, *Rev. Sci. Instrum.*, vol 7, pp 1394-1398, july 1985

- [24] - Mohammade, S. S., Graboski, M. S. and Sloan, E. D., A Mathematical Model of a Ramp Forced Hot-Wire Thermal Conductivity Instrument, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 24, pp 671-683, 1981

- [25] - McGinnis, D. S., Automated Line-Heat Source System for the Measurement of Thermal Conductivity and Diffusivity, *Canadian Agricultural Engineering*, vol 29, pp 201-207, 1987

- [26] - Batty, W. J., Probert, S. D., Ball, M. and O'Callaghan, P.W. Use of the Thermal-Probe Technique for the Measurement of the Apparent Thermal Conductivities of Moist Materials, *Applied Energy*, vol 18, pp 301-317, 1984

- [27] - Desmons, J. Y., Madieta, E., Martin, M., Torguet, R. and Le Ray, M., Nouvelle Method de Mesure de la Conductivite Thermique, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 27, pp 511-517, 1984

- [28] - Knibbe, P. G., The End-Effect Error in the Determination of Thermal Conductivity using a Hot-Wire Apparatus, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 29, pp 463-473, 1986

- [29] - Clarke, L. N. and Kingston, S. T., Equipment for the Simultaneous Determination of Thermal Conductivity and Diffusivity of Insulating Material Using a Variable-State Method, *Australian*

Journal of Applied Science, pp 172-187, 1950

- [30] - Vernotte, P., Détermination Simultanée de la Chaleur Spécifique et de la Conductibilité Thermique des Isolants. Méthode du Signal, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol 204, p.563, 1937
- [31] - Beck, J. V., and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, N. Y., 1977
- [32] - Guimarães, G., On the Estimation of Thermal Properties of Non-Metallic materials, *III ENCIT*, vol 2, 1990
- [33] - Kougebeardjo, R. A. and Thery, P., Thermal Diffusivity Determination by Cross Correlation Injected and Transmitted Heat Pulses Through a Wall, *J. Appl. Phys.*, vol 53, pp 2875 -2886, april 1982
- [34] - Leclercq, D. and Thery, P. Apparatus for Simultaneous Temperature and Heat-Flow Measurements under Transient Conditions, *Rev.Sci.Instrum.*, v 54, pp 374-380, mar 1983
- [35] - Ozisik, N., *Heat Conduction*, Wiley, New York, 1980
- [36] - National Physical Laboratory, *Certificate of Calibration* . Thermal Conductivity of a Pair Polythene Specimens, Reference 12321/90/021, England, 1991.
- [37] - Kougebeardjo, R. A., *Identification de la Diffusivité Thermique par Traitement du Transfert de Chaleur à Travers une Paroi Homogene en Régime impulsionnel et Pseudo-aléatoire. Application des méthodes de Correlation en Thermocinétique*, These

Docteur-Ingenieur, Université des Sciences et Techniques de Lille,
171p, 1981

[38] - Spiegel, M. R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*,
Mc Graw-hill do Brasil, 1973

[39] - Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform*, Englewood Cliffs:
Prentice-Hall, Inc, New Jersey, USA, 252p, 1974

[40] - Guimarães, G., *Calibração de Sensores de Fluxo de Calor e
Temperatura para Medição de Propriedades Termofísicas*, Relatório
Interno, Departamento Engenharia Mecânica, UFSC, 1993

[41] - Taylor, J. L., " *Fundamental of Measurement Error*", Neff Instrument
Corporation, USA, 1988

[42] - Guths, Saulo, "*Um Método Transiente para a Medição de Propriedades
Térmicas*", Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa
Catarina, Florianópolis, 1990

[43] - Incropera, F. P. and De Witt, D. P., *Introduction to Heat Transfer*,
John Wiley & Sons, Canada, 1990

[44] - Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer*. Hemisphere, Whashington,
1980

[45] - Prata, A. T., *TECT - Convecção Avancada*, Anotações de Aula, UFSC,
1^o Trimestre/1991

[46] - Bendat, J. S. and Piersol, A. G., *Analysis and Measurement Procedures*, Wiley - Interscience, 2^oEd, USA, p.566, 1986

[47] - Beck, J. V. and Blackwell, B., *Inverse problems*, Handbook of Numerical heat transfer, pp 787-834, 1990

APÊNDICE I

Cr terio para Estimção de Parâmetros

Este apêndice apresenta o cr terio para a minimização da função soma dos quadrados apresentada por Beck & Blackwell [47], ou seja,

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(Y_j(i) - T_j(i) \right)^2 \quad (\text{AI.1})$$

onde m   o número de sensores e n o número de instantes. Particularmente $m = 1, 2$, i. e., são usados dois sensores de temperatura (termopares), em $x = 0$ e $x = L$.

Aplica-se o método de Gauss de linearização para a obtenção das relações de recorrência para a estimação dos parâmetros b_1 e b_2 . Usa-se, por conveniência, uma not  o matricial para a dedução das relações. Um cr terio mais geral para a forma matricial de S pode ser dada por

$$S = \left(Y - T \right)^T \left(Y - T \right) \quad (\text{AI.2})$$

onde W é a matriz que inclui pesos desiguais para as medições. A Eq. (AI.2) apresenta a forma de S a ser minimizada.

A matriz das primeiras derivadas de S em relação aos parâmetros β_1 e β_2 é dada por

$$\nabla_{\beta} S = \begin{bmatrix} \partial S / \partial \beta_1 \\ \partial S / \partial \beta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.3})$$

Observa-se que a not  o b representa os valores finais dos parâmetros

estimados.

A forma matricial de uma expansão em série de Taylor de T em torno de $\beta = b$ pode ser escrita como

$$T(\beta) = T(b) + \left[\nabla_{\beta} T(b)^T \right]^T (\beta - b) + \dots \quad (A1.4)$$

onde o super-índice T representa a matriz transposta e

$$\nabla_{\beta} = \begin{bmatrix} \partial/\partial\beta_1 \\ \partial/\partial\beta_2 \\ \vdots \\ \partial/\partial\beta_p \end{bmatrix} \quad (A1.5)$$

onde p é o número de parâmetros e T tem derivadas contínuas perto de b .

Uma condição necessária para se determinar o mínimo de S é fazer a matriz derivada de S com respeito a β ser igual a zero, ou seja,

$$\nabla_{\beta} S = 2 \left[-\nabla_{\beta} T(\beta)^T \right] \left[Y - T(\beta) \right] = 0 \quad (A1.6)$$

$T(\beta)$ indica que T é uma função de β . Para um melhor entendimento, define-se a matriz sensibilidade $X(\beta)$

$$X(\beta) = \left[\nabla_{\beta} T(\beta)^T \right]^T \quad (A1.7)$$

Substituindo as Eqs. (A1.7) e (A1.4) na Eq. (A1.6) obtém-se

$$X^T(\bar{\beta}) \left[Y - T(b) - X(b)(\bar{\beta} - b) \right] = 0 \quad (A1.8)$$

onde $\bar{\beta} = \beta$ é o mínimo verdadeiro de S . Esta equação é não linear no parâmetro $\bar{\beta}$ se $X(\bar{\beta})$ é uma função de $\bar{\beta}$. Assim, no método de Gauss, $X(\bar{\beta})$ é

substituído por $X(b)$ e a matriz linear da equação é obtida. Devido a não linearidade, um processo iterativo é necessário. Assim, usando o índice de iteração k e a notação,

$$b^{(k)} = b, \quad b^{(k+1)} = \bar{b}, \quad T^{(k)} = T(b), \quad X^{(k)} = X(b) \quad \text{na Eq. (AI.8) com}$$

$X(\bar{b}) \cong X(b) = X^{(k)}$ obtém-se a equação

$$P^{-(k)} \begin{bmatrix} b^{(k+1)} - b^{(k)} \end{bmatrix} = X^{T(k)} \begin{bmatrix} Y - T^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.9})$$

onde $P^{-(k)}$ é definido por

$$P^{-(k)} = X^{T(k)} X^{(k)} \quad (\text{AI.10})$$

A Eq. (AI.9) é um conjunto de p equações lineares para o parâmetro desconhecido b^{k+1} . Assim, substituindo a Eq. (AI.10) na Eq. (9) obtém-se

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + P^{(k)} \begin{bmatrix} X^{T(k)} (Y - T^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.11})$$

sendo que o processo iterativo continua até que

$$\frac{b_i^{k+1} - b_i^k}{b_i^k} < 0.0001 \quad (\text{AI.12})$$

A seguir apresenta-se as várias componentes que aparecem na Eq. (AI.11), para o caso de dois sensores de temperatura nas superfícies extremas de uma amostra, ou seja, $m=2$, $b_1=K$ e $b_2=\alpha$.

Considerando a expressão obtida pela Eq. (AI.11) para a k -ésima iteração e se ainda $b^* = b^{k+1}$, $X = X^{k+1}$, $E = Y - T^k$ e $b^k = b$ então tem-se

$$b^* = b + P^{(k)} \left[X^T W^{-1} E \right] \quad (AI.13)$$

e

$$P^{(k)} = X^{T(k)} W^{-1} X^{(k)} \quad (AI.14)$$

onde a k - ésima iteração muda somente após todas as $m \times n$ observações terem sido consideradas, ou seja, as m posições de termopares serem avaliadas para todos os instantes medidos.

A matriz sensibilidade pode ser escrita

$$X = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(n) \end{bmatrix} \quad \text{onde,}$$

$$X(i) = \begin{bmatrix} X_{11}(i) & X_{12}(i) & \dots & X_{1p} \\ \vdots & & & \\ X_{m1}(i) & X_{m2}(i) & \dots & X_{mp} \end{bmatrix} \quad (AI.15)$$

note que $X_{jk}^{(i)}$ é o coeficiente de sensibilidade para a j -ésima variável dependente (posição $x=0$ e $x=L$) e k -ésimo parâmetro (β_1 e β_2) e o i - ésimo tempo. Assim,

$$X_{jk}^{(i)} = \frac{\partial T_j(i)}{\partial \beta_k} \quad (AI.16)$$

e um termo típico do produto $X^T X$ pode ser indicado como

$$\left[X^T X \right]_{kl} = \left[\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^m X_{jk}(t) X_{jl}(t) \right] \quad (AI.17)$$

Ao invés de esperar a avaliação das somas $X^T X$ após uma iteração completa, uma corrida no somatório pode ser realizada para reduzir o tempo de

cálculo. Assim, podemos definir $C_{sl}(i)$ como sendo

$$C_{sl}(i) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^i \sum_{j=1}^m X_{js}(t) & X_{jl}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.18})$$

e o termo sl de P^{-1} pode então ser determinado por

$$C_{sl}(i+1) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{i+1} \sum_{j=1}^m X_{js}(t) & X_{jl}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.19})$$

ou ainda

$$C_{sl}(i+1) = \sum_{t=1}^i \sum_{j=1}^m X_{js}(t) \quad X_{jl}(t) + \sum_{j=1}^m X_{js}(i+1) \quad X_{jl}(i+1) \quad (\text{AI.20})$$

ou seja

$$C_{sl}(i+1) = C_{sl}(i) + \sum_{j=1}^m X_{js}(i+1) \quad X_{jl}(i+1) \quad (\text{AI.21})$$

sendo $s, l = 1, \dots, p$ (parâmetros). Da mesma forma, se

$$Y(i) = \begin{bmatrix} Y_1(i) \\ \vdots \\ Y_m(i) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.22})$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(n) \end{bmatrix}$$

e

$$T(i) = \begin{bmatrix} T_1(i) \\ \vdots \\ T_m(i) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.23})$$

com

$$T = \begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \\ \vdots \\ T(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

logo, tem-se $E_j(i) = Y_j(i) - T_j(i)$. Assim um termo similar recursivo para $X^T E$ pode ser escrito por

$$X^T E = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^m X_{js}(t) & E_j(t) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.25})$$

e considerando-se apenas instantes $t \leq i$

$$D_s(i) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^i \sum_{j=1}^m X_{js}(t) & E_j(t) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.26})$$

e

$$D_s(i+1) = D_s(i) + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m X_{js}(i+1) & E_j(i+1) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.27})$$

com $s = 1, 2, \dots, p$. Assim o procedimento para a obtenção do novo vetor parâmetro é primeiro usar as Eqs. (AI.21) e daí a i -ésima matriz P pode ser encontrada ao obter-se a inversa

$$P(i+1) = \begin{bmatrix} C_{11}(i+1) & \dots & C_{1p}(i+1) \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p1}(i+1) & \dots & C_{pp}(i+1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{AI.28})$$

Aplicando-se as Eqs. (AI.27) e (AI.29) na Eq. (A.13) encontra-se, portanto,

o vetor parâmetro,

$$b^*(i+1) = b + P(i+1) D(i+1) \quad (AI.29)$$

Note que $b^*(i+1)$ é o vetor parâmetro para o $(i+1)$ -ésimo tempo na $(k+1)$ -ésima iteração. O vetor b na Eq. (AI.29) para a primeira iteração é b_0 , um valor inicial estimado e $b^*(n)$ da iteração precedente para as subseqüentes iterações em k . Se apenas os valores dos parâmetros finais convergidos são de interesse, é necessário inverter a matriz P somente para cada iteração completa, ou seja, é somente necessário encontrar $P(n)$ e usar

$$b^*(n) = b + P(n) D(n) \quad (AI.30)$$

no final de uma iteração onde o vetor b é trocado por $b^*(n)$ e outra iteração em k começa, com X_{ij} sendo avaliado para um novo b .

Exemplificando para o caso dos parâmetros $b_1 = K$, $b_2 = \alpha$ e sensores na superfície, ou seja, $m = 2$, tem-se, reescrevendo as Eqs. (AI.21) e (AI.27)

$$C_{s1}(i+1) = C_{s1}(i) + \sum_{j=1}^{m=2} X_{js}(i+1) X_{j1}(i+1) \sigma \quad (AI.31)$$

$$D_s(i+1) = D_s(i) + \sum_{j=1}^{m=2} X_{js}(i+1) E_j(i+1) \quad (AI.32)$$

e substituindo os valores dos índices nas Eqs.(AII.32)-(AII.33) obtém-se

$$C_{11}(i+1) = C_{11}(i) + X_{11}(i+1)X_{11}(i+1) + X_{21}(i+1)X_{21}(i+1) \quad (AI.33)$$

$$C_{12}(i+1) = C_{12}(i) + X_{11}(i+1)X_{12}(i+1) + X_{21}(i+1)X_{22}(i+1) \quad (AI.34)$$

$$C_{21}(i+1) = C_{21}(i) + X_{22}(i+1)X_{11}(i+1) + X_{22}(i+1)X_{21}(i+1) \quad (AI.35)$$

$$C_{22}(i+1) = C_{22}(i) + X_{22}(i+1)X_{12}(i+1) + X_{22}(i+1)X_{22}(i+1) \quad (AI.36)$$

$$D_1(i+1) = D_1(i) + X_{11}(i+1)E_1(i+1) + X_{21}(i+1).E_2(i+1). \quad (AI.37)$$

$$D_2(i+1) = D_2(i) + X_{12}(i+1)E_1(i+1) + X_{22}(i+1).E_2(i+1) \quad (AI.38)$$

onde

$$E_1(i+1) = Y_1(i+1) - T_1(i+1) \quad (AI.39)$$

$$E_2(i+1) = Y_2(i+1) - T_2(i+1) \quad (AI.40)$$

e

$$\mathbf{b}^*(i+1) = \mathbf{b} + P(i+1) D(i+1) \quad (AI.41)$$

sendo

$$P(i+1) = \begin{bmatrix} C_{11}(i+1) & C_{12}(i+1) \\ C_{21}(i+1) & C_{22}(i+1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (AI.42)$$

$$P(i+1) = \frac{1}{|C|} \begin{bmatrix} C_{22}(i+1) & -C_{12}(i+1) \\ -C_{21}(i+1) & C_{11}(i+1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (AI.43)$$

onde

$$|C| = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \quad (AI.44)$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{22}(i+1)/|P| & -C_{12}(i+1)/|P| \\ -C_{21}(i+1)/|P| & C_{11}(i+1)/|P| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (AI.45)$$

avaliando separadamente,

$$b_1^* = b_1 + \left[C_{22}(i+1) D_1(i+1) - C_{12}(i+1).D_2(i+1) \right] / |C| \quad (AI.46)$$

$$\mathbf{b}_2^* = \mathbf{b}_2 + \left[-C_{21}(i+1) D_1(i+1) - C_{11}(i+1).D_2(i+1) \right] / |C| \tag{A1.47}$$

APÊNDICE II

Processos Aleatórios Estacionários - Conceitos Básicos

Um processo aleatório $\{X_k(t)\}$, com t variando entre $-\infty$ a ∞ (também chamado séries de tempo ou processos estocásticos), e denotado pelo símbolo $\{\}$, é um conjunto de funções de valores reais ou complexos, e pode ser caracterizado através de sua estrutura de probabilidade. Cada função particular $X_k(t)$, onde t é a variável e k é fixo é chamada função amostrada. Na prática, uma função amostrada é resultado da observação de um experimento. O número possível de experimentos representam um espaço amostrado de índice k , contável ou não. Para qualquer número N e tempos fixados t_1, t_2, \dots, t_n as quantidades $X_k(t_1), X_k(t_2), \dots, X_k(t_n)$, representam N variáveis aleatórias sobre o índice k . Considera-se dois processos aleatórios (arbitrários) $\{X_k(t)\}$ e $\{Y_k(t)\}$. A primeira quantidade estatística de interesse são os valores médios para valores fixos arbitrários de t , onde $X_k(t)$ e $Y_k(t)$ são variáveis sobre o índice k . Estes são definidos por

$$\mu_x(t) = E [X_k(t)] \quad (\text{AII.1})$$

$$\mu_y(t) = E [Y_k(t)] \quad (\text{AII.2})$$

Nesse caso $E [.]$ representa o valor esperado da variável aleatória em questão. Para processos aleatórios estacionários, $\{X_k(t)\}$ e $\{Y_k(t)\}$, os valores esperados (médios) tornam-se constantes e independentes de t [46]. Assim Para um valor arbitrário t e τ define-se

$$R_{xx}(\tau) = E \left[X_k(t) X_k(t + \tau) \right] \quad (\text{AII.3})$$

$$R_{yy}(\tau) = E \left[Y_k(t) Y_k(t + \tau) \right] \quad (\text{AII.4})$$

$$R_{xy}(\tau) = E \left[X_k(t) Y_k(t + \tau) \right] \quad (\text{AII.5})$$

onde $R_{xx}(\tau)$, $R_{yy}(\tau)$ e $R_{xy}(\tau)$ são chamadas funções autocorrelações de $\{X_k(t)\}$ e $\{Y(t)\}$, respectivamente, enquanto $R_{xy}(\tau)$ é chamada função correlação cruzada entre $\{X_k(t)\}$ e $\{Y(t)\}$. Assim assumindo que $R_{xx}(\tau)$, $R_{yy}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ existam e além disso, as integrais de seus valores absolutos sejam finitos, ou seja

$$\int_0^{\infty} |R_{xy}(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{AII.6})$$

o que é sempre verdade para conjuntos finitos, então a transformada de Fourier de $R(\tau)$ existirá como definida por

$$S_{xx}(f) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j 2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.7})$$

$$S_{yy}(f) = \int_0^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-j 2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.8})$$

$$S_{xy}(f) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j 2\pi f \tau} d\tau \quad (\text{AII.9})$$

onde $S_{xx}(f)$, $S_{yy}(f)$ são as chamadas funções densidade autoespectral de $\{X_k(t)\}$ e $\{Y_k(t)\}$ respectivamente, enquanto $S_{xy}(f)$ é chamada função densidade espectral cruzada entre $\{X_k(t)\}$ e $\{Y_k(t)\}$. Uma outra forma de se

definir as funções densidade espectral é baseada nas transformadas de Fourier dos dados originais $\{X_k(t)\}$ e $\{Y_k(t)\}$, ou seja,

$$S_{xy}(f, T, k) = \frac{1}{T} X_k^*(f, T) Y_k(f, T) \quad (\text{AII.10})$$

onde

$$X(f) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (\text{AII.11})$$

e

$$Y(f) = \int_0^{\infty} Y(t) e^{-j 2\pi f t} dt \quad (\text{AII.12})$$

onde $X(f, T)$ e $Y(f, T)$ representam as transformadas de Fourier finitas de $X_k(t)$ e $Y_k(t)$ respectivamente e $X_k^*(f, T)$ é o complexo conjugado de $X_k(f, T)$, sendo T o período para o qual $X_k(t) = 0$ para $t > T$.

APÊNDICE III

Desenvolvimento das integrais relativas aos fluxos de calor nas superfícies da amostra e determinação dos coeficientes de sensibilidade

Este apêndice apresenta a solução para as temperaturas da superfície frontal e oposta da amostra, considerando-se os fluxos de calor medidos por transdutores de fluxo de calor. Apresenta-se também o desenvolvimento dos coeficientes de sensibilidade a partir das expressões das temperaturas superficiais.

Ajusta-se os pontos experimentais dos fluxos de calor com uma curva polinomial de 5ª ordem, conforme mostra uma curva típica apresentada na Figura AIII-1.

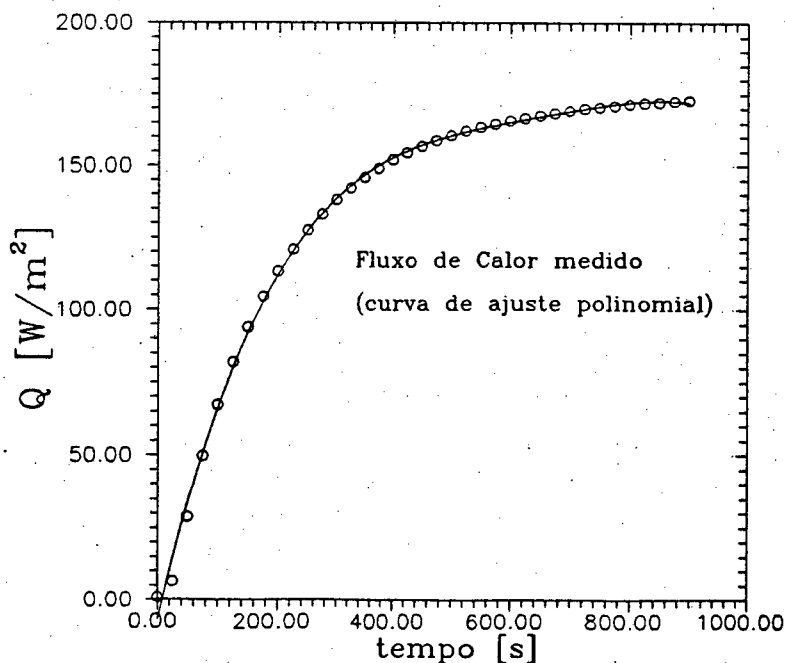


Figura AIII-1 - Curva típica de um fluxo calor submetido na face frontal da amostra.

Dessa forma, todos os fluxos envolvidos são ajustados e podem ser

dados pela forma geral

$$Q(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5 \quad (\text{AIII-1})$$

onde t representa o tempo e Q o fluxo de calor. As variáveis a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 e a_5 são as constantes obtidas apartir da curva de ajuste polinomial. O super índice (*) nessa equação representa as constantes avaliadas na superfície oposta.

Reescrevendo a Eq.(3.15) tem-se

$$\begin{aligned} T(x,t) = T_0 &+ (\alpha / L \cdot K) \int_0^t \phi_1(\tau) d\tau + \\ & (2\alpha/L \cdot K) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \cos(\beta_m x/L) \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} \phi_1(\tau) d\tau + \\ & (\alpha / L \cdot K) \int_0^t \phi_2(\tau) d\tau + (2 \alpha / L \cdot K) \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^m - 1] \cdot \\ & \cdot e^{-\beta_m^2 \alpha t/L^2} \cos(\beta_m x/L) \int_0^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau/L^2} \phi_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{AIII.2})$$

Aplicando-se a Eq. (AIII-1) na Eq. (AIII-2), substituindo $Q(t)$ por expressões análogas a ϕ_1 e ϕ_2 e substituindo t por τ obtém-se, utilizando-se as tabelas de integrais de Spiegel [38],

$$T_1 = T_0 + (\alpha / L.K) . I_1 + a_0 . L / (K . 3)$$

$$(-2.a_0.L/K) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_n^2 . t} / \beta_m^2 +$$

$$(2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{-A_n . t} . I_{0n} + I_{2n} / A_n \right)$$

$$(-\alpha / L.K) . I_1^* + a_0^* . L (K . 6)$$

$$+ (2.a_03.L/K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} / \beta_m^2 +$$

$$- (2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n . t} . I_{0n}^* + I_{2n}^* / A_n \right) \quad (AIII.3)$$

e

$$T_2 = T_0 + (\alpha / L.K) . I_1 - a_0 . L / (K . 6)$$

$$(-2.a_0.L/K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-A_n . t} / \beta_m^2 +$$

$$(2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} \left((-1)^m e^{-A_n . t} . I_{0n} + I_{2n} / A_n \right)$$

$$(-\alpha / L.K) . I_1^* + a_0^* . L (K . 3)$$

$$+ (2.a_03.L/K) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_n . t} / \beta_m^2 +$$

$$- (2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{-A_n . t} . I_{0n}^* + I_{2n}^* / A_n \right) \quad (AIII.4)$$

onde

$$I_1 = a_0 + a_1 \cdot (t)^{1/2} + a_2 \cdot (t)^2/2 + a_3 \cdot (t)^3/3 + a_4 \cdot (t)^4/4 + a_5 \cdot (t)^5/5 \quad (\text{AIII.5})$$

$$\begin{aligned} I_{2n} = a_0 + \left[a_1 \cdot (t) - a_1/A_n \right] + \left[a_2 \cdot (t)^2 - 2a_2 \cdot (t)/A_n + \right. \\ \left. 2a_2 \cdot (t)/A_n^2 \right] + \left[a_3 \cdot (t)^3 - 3a_3 \cdot (t)^2/A_n + 6a_3 \cdot (t)/A_n^2 + \right. \\ \left. - 6a_3 \cdot (t)/A_n^3 \right] + \left[a_4 \cdot (t)^4 - 4a_4 \cdot (t)^3/A_n + 12a_4 \cdot (t)^2/A_n^2 - \right. \\ \left. - 24a_4 \cdot (t)/A_n^3 - 24 a_4/A_n^4 \right] + \left[a_5 \cdot (t)^5 - 5a_5 \cdot (t)^4/A_n + \right. \\ \left. 20a_5 \cdot (t)^3/A_n^2 - 60 a_5 \cdot (t)^2/A_n^3 - \right. \\ \left. + 120 a_5 \cdot (t)/A_n^4 - 120 \cdot a_5/A_n^5 \right] \quad (\text{AIII.6}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{0n} = \left[a_1 /A_n^2 - 2 a_2/A_n^3 + 6 a_3 /A_n^4 \right. \\ \left. - 24 a_4/A_n^5 + 120 a_5/A_n^6 \right] \quad (\text{AIII.7}) \end{aligned}$$

onde I_{0n}^* , I_{2n}^* , I_1^* são expressões análogas a I_{0n} , I_{2n} , I_1 , porém considerando-se as constantes obtidas para a curva de ajuste polinomial do fluxo de calor na face oposta. Salienta-se que para a obtenção das expressões para as temperaturas na superfície utilizou-se as igualdades

$$(2L) \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m x/L) / \beta_m^2 = -x + L/3 + x^2/2L \quad (\text{AIII.8})$$

$$(2L) \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m x/L) (-1)^m / \beta_m^2 = x^2/2L - L/6 \quad (\text{AIII.9})$$

que podem ser demonstradas, resolvendo-se problemas de difusão de calor unidimensionais e transientes, a partir de condições de contorno do tipo derivadas nulas para ambos as faces e condições iniciais do tipo $\theta(x,0) = x.1$ e $\theta(x,0) = x^2.1$, sendo $\theta(x,0)$, em cada caso definido dimensionalmente de forma compatível.

Portanto, os coeficientes de sensibilidade, X_{11} , X_{12} , X_{21} , X_{22} definidos pelas Eqs. (3.19)-(3.22), ou seja

$$X_{11} = \frac{\partial T_1}{\partial K} \quad (\text{AIII.10})$$

$$X_{21} = \frac{\partial T_2}{\partial K} \quad (\text{AIII.11})$$

$$X_{12} = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \quad (\text{AIII.12})$$

$$X_{22} = \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} \quad (\text{AIII.13})$$

podem ser determinados.

Aplicando as definições dos coeficientes nas Eqs. (AIII.3) e (AIII-4) obtém-se

$$X_{11} = \frac{\partial T_1}{\partial K} = - \frac{1}{K} \left[T_1(x,t) - T_0 \right] \quad (\text{AIII.14})$$

$$X_{21} = \frac{\partial T_2}{\partial K} = - \frac{1}{K} \left[T_2(x,t) - T_0 \right] \quad (\text{AIII.15})$$

$$X_{12} = + \left(I_1 / L \cdot K \right) + (a_0 \cdot L / K) \cdot (2t / L^2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A_n^2 \cdot t} +$$

$$\begin{aligned}
& (2./L.K) \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n} + I_{2n} / A_n \right) \\
& - (2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}' + I_{2n}' / A_n \right. \\
& \left. - I_{2n}' / (A_n \cdot \alpha) - \left(\beta m^2 \cdot t / L^2 K \right) \cdot e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}' \right) \\
& + STK0
\end{aligned} \tag{AIII.16}$$

sendo

$$\begin{aligned}
STK0 = & - \left(I_1^* / L \cdot K \right) - (a_0^* \cdot L/K) \cdot (t/L^2) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_n^2 \cdot t} + \\
& - (2./L.K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n^2 \cdot t} I_{0n}^* + I_{2n}^* / A_n \right) + \\
& - (2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}^* + I_{2n}^* / A_n \right. \\
& \left. - I_{2n}^* / (A_n \cdot \alpha) - \left(\beta m^2 \cdot t / L^2 \right) \cdot e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}^* \right)
\end{aligned} \tag{AIII.17}$$

e

$$X_{22} = + \left(I_1 / L \cdot K \right) + (a_0 \cdot L/K) \cdot (2t/L^2) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-A_n^2 \cdot t} +$$

$$\begin{aligned}
& (2./L.K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n} + I_{2n} / A_n \right) + \\
& + (2.\alpha/L.K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}' + I_{2n}' / A_n \right) +
\end{aligned}$$

$$- I_{2n}' / (A_n \cdot \alpha) - \left(\beta m^2 \cdot t / L^2 K \right) \cdot e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}' \Bigg) +$$

$$+ STK1 \quad (AIII.18)$$

sendo

$$STK1 = - \left(I_1^* / L \cdot K \right) - (a_0^* \cdot L / K) \cdot (2t / L^2) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A_n^2 \cdot t} +$$

$$- (2 \cdot L / K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n^2 \cdot t} \cdot I_{0n}^* + I_{2n}' / A_n \right) +$$

$$- (2 \cdot \alpha / L \cdot K) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}^* + I_{2n}' / A_n \right) +$$

$$- I_{2n}'^* / (A_n \cdot \alpha) - \left(\beta m^2 \cdot t / L^2 \right) \cdot e^{-A_n \cdot t} \cdot I_{0n}'^* \Bigg) \quad (AIII.19)$$

onde I_{0n}' e I_{2n}' são as respectivas derivadas de I_{0n} e I_{2n} em relação a α dadas por

$$I_{2n}' = \left(- a_1 / A_n \cdot \alpha \right) + \left(2a_2(t) / A_n \cdot \alpha + \right.$$

$$- 4a_2(t) / A_n^2 \cdot \alpha \Bigg) + \left(3a_3(t)^2 / A_n \cdot \alpha - 12a_3(t) / A_n^2 \cdot \alpha + \right.$$

$$18a_3(t) / A_n^3 \cdot \alpha \Bigg) + \left(4a_4(t)^3 / A_n \cdot \alpha - 24a_4(t)^2 / A_n^2 \cdot \alpha + \right.$$

$$72a_4(t)^2 / A_n^3 \cdot \alpha - 96 a_4 / A_n^4 \cdot \alpha \Bigg) + \left(5a_5(t)^4 / A_n \cdot \alpha + \right.$$

$$- 40a_5(t)^3 / A_n^2 \cdot \alpha - 180 a_5(t) / A_n^3 \cdot \alpha$$

$$- 480 a_5(t) / A_n^4 \cdot \alpha - 120 \cdot a_5 / A_n^5 \cdot \alpha \Bigg) \quad (AIII.20)$$

$$I_{0n}' = \left(-2a_1 / A_n^2 \cdot \alpha + 6 a_2 / A_n^3 \cdot \alpha - 24 a_3 / A_n^4 \cdot \alpha \right. \\ \left. - 120 a_4 / A_n^5 \cdot \alpha - 720 a_5 / A_n^6 \cdot \alpha \right) \quad (\text{AIII.21})$$

Da mesma forma $I_{0n}'^*$, $I_{2n}'^*$, são expressões análogas a I_{0n}' , I_{2n}' , porém com as constantes dos ajustes obtidos para a superfície oposta. Salienta-se, nesse sentido que as expressões para as temperaturas e coeficientes de sensibilidade estão na sua forma mais geral. Particularmente, nos experimentos desse trabalho, relativos ao método I, os fluxos de calor que alcançaram a superfície oposta foram considerados nulos, uma vez que seus valores não ultrapassaram a incerteza apresentada pelos transdutores de fluxo de calor de $2,5 \text{ W/m}^2$.